Keressük először a $PA+PB+PC$ maximumát. Legyen egyelőre P belső pont, és tegyük fel, hogy $BC \geq CA \geq AB$. A P-n át AB-vel húzott párhuzamos a másik két oldalt a D, illetve E pontokban metszi (*1. ábra*). Az ABC és DEC háromszögek hasonlóságból következik, hogy $EC \geq DC \geq DE$. Ebből és a háromszögegyenlőtlenségből:

$$PC < EC$$
$$DE \leq DC$$
$$PA < AD + DP$$
$$PB < PE + EB.$$

A négy egyenlőtlenséget összeadva:

$$DE + PA + PB + PC < (EC + EB) + (AD + DC) + (DP + PE),$$

(1) $$PA + PB + PC < BC + CA.$$

Ha P a háromszög határának egy, a csúcsoktól különböző pontja pl. $P = P_1$, akkor

(2) $$PA + PB + PC < AB + BC \leq BC + CA.$$

Ha például $P = C$, akkor

(3) $$PA + PB + PC = BC + CA.$$

Az (1), (2) és (3) összefüggésekből láthatjuk, hogy $PA + PB + PC$ akkor maximális, ha P a legkisebb oldallal szemközti csúcs.

Vizsgáljuk meg ezután, hogy $QA^2 + QB^2 + QC^2$ mikor maximális. A *2. ábrán* Q a háromszöglemez tetszőleges pontja, S pedig a háromszög súlypontja. Legyen $\overrightarrow{SQ} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$ és $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $|\mathbf{c}| = c$, $|\mathbf{q}| = q$.

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{c})^2 = 3q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + a^2 + b^2 + c^2,$$

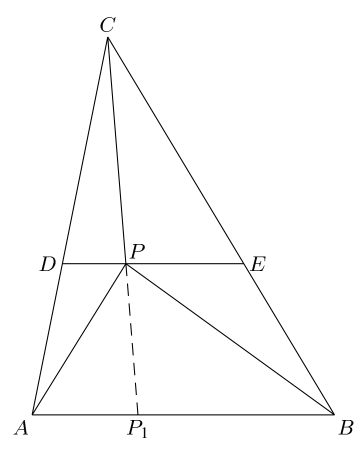
Mivel $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $QA^2 + QB^2 + QC^2 = 3q^2 + a^2 + b^2 + c^2$. Az utolsó három tag összege konstans, a vizsgált összeg tehát akkor a legnagyobb, ha q a lehető legnagyobb. Ezért a háromszöglemez S-től legtávolabbi pontját kell megkeresnünk, ez pedig az S-től legtávolabbi csúcs. Ismeretes, hogy a háromszög s_c súlyvonala – a szokásos jelölésekkel: $s_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, ami akkor a legnagyobb, ha a c oldal a legkisebb. Tehát $QA^2 + QB^2 + QC^2$ akkor maximális, ha Q a legkisebb oldallal szemközti csúcs. A két eredményből következik, hogy $P = Q$.

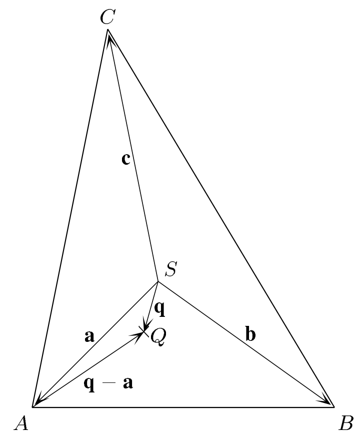
Vörös Zoltán (Tiszavasvári, Váci M. Gimn, IV. o.t.)

Megjegyzés. 1. Feltehető az a kérdés is, hogy az ABC háromszög síkjának mely P pontjára lesz $PA + PB + PC$ a legkisebb. A válasz megadásához szükségünk lesz egy fogalomra. Azt a pontot, amelyből a háromszög oldalai ugyanakkora szögben látszanak, a háromszög *izogonális* pontjának nevezzük. Egy háromszögnek pontosan akkor van izogonális pontja, ha a legnagyobb szöge $120°$-nál kisebb.

Ha egy háromszögnek van izogonális pontja, $PA + PB + PC$ akkor a legkisebb, ha P az izogonális pont. Egyéb esetben a szélsőértéket a tompaszög csúcsa adja. A probléma megoldása megtalálható *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvében.

2. A megoldásunkból következik, hogy $QA^2 + QB^2 + QC^2$ akkor a legkisebb, ha Q a háromszög súlypontja.




C
c
S
q
Q
a
b
q − a
A
B