I. megoldás. Konstruálunk egy a_1, a_2, ... sorozatot, amely olyan pozitív egészekből fog állni, amelyeknek a tízes számrendszerbeli felírásai csak 1-es és 2-es számjegyekből állnak, továbbá minden k pozitív egészre az a_k szám k-jegyű lesz és osztható 2^k-nal. Ennek a sorozatnak a létezéséből következik a feladat állítása.

Legyen $a_1 = 2$; erre az állítás teljesül. Tegyük fel, hogy már definiáltuk a_k-t, amely k jegyű és osztható 2^k-nal. Tekintsük az $x = 10^k + a_k$ és $y = 2 \cdot 10^k + a_k$ számokat. Ezek úgy keletkeznek, hogy az a_k jegyei elé írunk még egy számjegyet. Mindkét szám osztható 2^k-nal, mert a_k és 10^k is osztható vele. Másrészt $y - x = 10^k = 2^k \cdot 5^k$ nem osztható 2^{k+1}-nel, tehát x és y 2^{k+1}-nel osztva különböző maradékot adnak. Egy 2^k-nal osztható szám azonban 2^{k+1}-nel osztva csak 0 vagy 2^k maradékot adhat, így x és y közül az egyik 2^{k+1}-nel osztva 2^k maradékot ad, a másik pedig osztható vele. Az utóbbit választva a_{k+1}-nek, folytatható a sorozat.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Legyen k pozitív egész, és írjuk fel azokat az k-jegyű számokat, amelyeknek minden jegye 1 vagy 2.

$$111\ldots111,\ 111\ldots112,\ 111\ldots121,\ \ldots,\ 222\ldots222.$$

Azt állítjuk, hogy ezek 2^k-nal osztva csupa különböző maradékot adnak. Mivel a felsorolt számok és a lehetséges maradékok száma is éppen 2^k, ebből következik, hogy minden maradék előfordul, következésképpen a 0 is.

Legyen x és y két különböző szám az imént felsoroltak közül. Azt kell bebizonyítanunk, hogy $x - y$ nem osztható 2^k-nal. Legyen jobbról számolva az m-edik az első olyan helyiérték, ahol x és y jegye nem egyezik meg. A két szám különbsége $m - 1$ darab 0-ra végződik, az ezeket közvetlenül megelőző jegye pedig 1 vagy 9. Ebből következik, hogy $x - y = p \cdot 10^{m-1}$, ahol p egy páratlan szám. Mivel $p \cdot 10^{m-1}$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevője $m - 1 < k$, a szám nem osztható 2^k-nal. Ezzel az állítást beláttuk.

Visontai Mirkó (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)