Legyen a téglatest átlója d. A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2+c^2=d^2$. Ismeretes, hogy 4-gyel osztva a páratlan négyzetszámok 1-et, a páros négyzetszámok 0-t adnak maradékul.

Tegyük fel először, hogy $a\cdot b$ páratlan. Ekkor a is, b is páratlan, így a^2 és b^2 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Ezért $a^2+b^2+c^2$ 4-gyel való osztási maradéka 2 vagy 3 lesz, tehát most $a^2+b^2+c^2$ semmilyen c-vel nem lehet négyzetszám, és d ilyenkor nem lesz egész.

Azt kell még bizonyítanunk, hogy ha $a\cdot b$ páros, akkor van megfelelő c.

Ha a, b mindegyike páros, akkor a^2+b^2 osztható 4-gyel, ezért van olyan c egész, amelyre $a^2+b^2=4(c+1)$, és nyilván c pozitív, hiszen a^2+b^2 legalább 8. Ezzel a c-vel $d^2=a^2+b^2+c^2=4c+4+c^2=(c+2)^2$, tehát d (pozitiv) egész.

Ha a és b közül az egyik páros, a másik páratlan, akkor feltehető, hogy a páros. Ebben az esetben a^2 osztható 2-vel, b^2 pedig 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, tehát van olyan c egész, amellyel $a^2+b^2=2c+1$, és c biztosan pozitív, hiszen a^2+b^2 legalább 5. Erre a c-re $d^2=a^2+b^2+c^2=2c+1+c^2=(c+1)^2$, így d most is egész.

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) *Tóth Zoltán Péter* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.)