Jelentse A_i azoknak a dobássorozatoknak a számát, amelyekben pontosan i alkalommal szerepelnek egymás után az 1, 2, 3 dobások. ($0 \leq i \leq 3$, mert a 10 dobás között 4-szer már nem szerepelhet ez a sorozat.)

Az összes dobások száma – mivel egy dobás 6-féle lehet –

$$6^{10} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3. \tag{1}$$

Tekintsünk most három egymás utáni dobást, és tegyük fel, hogy ezek értéke 1, 2, 3. A többi 7 dobás tetszőleges lehet, tehát az ilyen sorozatok száma 6^7. A három rögzített dobás helyét 8-féleképpen választhatjuk ki, mert az első eleme az első nyolc dobás közül kerül ki. A kapott $8 \cdot 6^7$ dobássorozat között minden sorozatot pontosan annyiszor soroltunk fel, ahányszor a sorozatban szerepel az 1, 2, 3 hármas, tehát

$$8 \cdot 6^7 = A_1 + 2A_2 + 3A_3. \tag{2}$$

Tekintsük azokat a dobássorozatokat, amelyekben két rögzített helyen szerepel az 1, 2, 3 hármas. A maradék négy dobás 6^4 féle lehet. Annak kiszámításához, hogy a két rögzített hármas helye hányféle lehet, vonjuk össze képzeletben a két hármast egy-egy elemmé. Ezzel azt érjük el, hogy két összevont hármas és négy „sima” dobás sorrendje a kérdés. A 6 hely közül kell kiválasztani azt a kettőt, amelyiken összevont hármas lesz. Ez $\binom{6}{2} = 15$-féle módon lehetséges.

A $15 \cdot 6^4$ sorozat között egyszer szerepelnek azok, amelyek pontosan kétszer tartalmazzák az 1, 2, 3 hármast és háromszor azok, amelyek háromszor tartalmazzák, tehát

$$15 \cdot 6^4 = A_2 + 3A_3. \tag{3}$$

Végül tekintsük azokat a dobássorozatokat, amelyek háromszor tartalmazzák az 1, 2, 3 hármast. Az előbbiekhez hasonlóan kapjuk, hogy a három hármas helyét $\binom{4}{3} = 4$-féleképpen választhatjuk ki, a megmaradt egyetlen dobás 6 féle lehet, tehát az ilyenek száma $4 \cdot 6$, vagyis

$$4 \cdot 6 = A_3. \tag{4}$$

A (2), (3), (4) egyenletek alapján azoknak a dobássorozatoknak a száma, amelyekben egymás után szerepelnek az 1, 2, 3 dobások,

$$A_1 + A_2 + A_3 = (A_1 + 2A_2 + 3A_3) - (A_2 + 3A_3) + A_3 = 8 \cdot 6^7 - 15 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6 = 2\ 220\ 072.$$

A keresett valószínűség pedig

$$P = \frac{2\ 220\ 072}{6^{10}} \approx 0,0367.$$

Tehát körülbelül átlagosan 27 ilyen tízdobásos sorozat közül egyben lesz 1, 2, 3 dobás éppen egymás után.

Brezovich László (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.)

Megjegyzések. 1. A megoldásban az úgynevezett *logikai szitaformula* egy speciális esetét számoltuk végig. Ennek egyik formája azt állítja, hogy ha $H_1, H_2, \ldots, H_n$ véges halmazok, akkor

$$|H_1 \cup \cdots \cup H_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |H_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |H_i \cap H_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |H_i \cap H_j \cap H_k| - + \ldots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} |H_1 \cap H_2 \cap \ldots H_n|.$$

Ennek felhasználásával igazolható, hogy n dobás esetén azoknak a sorozatoknak a száma, amelyekben valamelyik három egymás utáni dobás rendre 1, 2, 3,

$$\sum_{k=1}^{[n/3]} \binom{n-2k}{k} 6^{n-3k}.$$

2. Néhány versenyző a következő – hibás – módszerrel próbálta kiszámítani azoknak a dobássorozatoknak a számát, amelyekben szerepel az 1, 2, 3 hármas: „A hármas helye 8-féle lehet, a többi 7 dobás mindegyike 6-féle, ez összesen $8 \cdot 6^7$ lehetőség.” Ez a módszer azért téves, mert többször számolja azokat a dobássorozatokat, amelyekben az 1, 2, 3 hármas nemcsak 1-szer szerepel. Az ilyen dolgozatokra nem adtunk pontot.