I. megoldás. Legyen P n-edfokú, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, ahol $a_n\neq 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$P(x+1)-P(x)=a_n\left((x+1)^n-x^n\right)+a_{n-1}\left((x+1)^{n-1}-x^{n-1}\right)+\dots+a_1\left((x+1)-x\right)$$

polinom legalább $(n-1)$-edfokú tagjainak összege

$$a_n\left(\left(x^n+nx^{n-1}\right)-x^n\right)+a_{n-1}\left(x^{n-1}-x^{n-1}\right)=na_nx^{n-1},$$

vagyis ez a polinom $(n-1)$-edfokú. Esetünkben a $P(x+1)-P(x)=2x-1$ polinom elsőfokú, a P polinom csak másodfokú lehet.

Legyen tehát $P(x)=ax^2+bx+c$. Ekkor

$$P(x+1)-P(x)=\left(a(x+1)^2+b(x+1)+c\right)-\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+(a+b).$$

Ez pontosan akkor egyenlő a $2x+1$ polinommal, ha $2a=2$ és $a+b=1$, vagyis $a=1$ és $b=0$. A P polinom tehát x^2+c alakú lehet. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ilyenekre teljesül az (1) azonosság.

II. megoldás. Könnyen beláthatjuk, hogy az x^2+c alakú polinomokra (1) teljesül. Megmutatjuk, hogy P csak ilyen alakú lehet.

Tegyük fel, hogy a P polinom eleget tesz az (1) azonosságnak, és legyen $Q(x)=P(x)-x^2-P(0)$. Erre a polinomra igaz, hogy $Q(0)=P(0)-0^2-P(0)=0$, és

$$Q(x+1)=P(x+1)-(x+1)^2-P(0)=P(x)+2x+1-(x+1)^2-P(0)==P(x)-x^2-P(0)=Q(x)$$

minden x-re.

E két információból következik, hogy minden egész x-re $Q(x)=0$. Egy polinom értéke azonban csak akkor lehet végtelen sok helyen 0, ha a polinom a 0 polinom, vagyis $Q(x)=0$. Így tehát $P(x)=x^2+P(0)$, vagyis P a kívánt alakú.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III o.t.)

Megjegyzés. Többen indoklás nélkül feltételezték, hogy a P polinom csak másodfokú lehet. Ők dolgozatukra 1 pontot kaptak.