A számolásokban az indexelést és az egyenletek számozását ciklikusan végezzük (mod 1995), tehát például $x_{1996}$-on $x_1$-et, $x_0$-n $x_{1995}$-öt értjük.

Először megmutatjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_{1995}$ számok között szerepelnie kell a 0-nak. Tegyük fel, hogy a 0 nem szerepel, és írjuk fel az egyenletekben szereplő 1-esek elhagyásával keletkező egyenlőtlenségeket:

$$x_1^2 > x_{1994}x_{1995};\ x_2^2 > x_{1995}x_1;\ x_3^2 > x_1x_2;\ \ldots;\ x_{1995}^2 > x_{1993}x_{1994}.$$

Ha az $x_i$-k mind azonos előjelűek, akkor ezekben az egyenlőtlenségekben mindkét oldalon csupa pozitív szám áll, és az egyenlőtlenségeket összeszorozva ellentmondásra jutunk. Az $x_i$-k között tehát kell lennie pozitívnak és negatívnak is, tehát vannak szomszédos, különböző előjelű értékek is. Legyen $x_i$ és $x_{i+1}$ két szomszédos, ellentétes előjelű szám. Az $(i+2)$-edik egyenlet alapján

$$x_{i+2}^2 = 1 + x_ix_{i+1} < 1.$$

Ez viszont csak úgy lehet, ha $x_{i+2} = 0$. Ez ellentmondás, tehát van 0 az $x_i$-k között.

Tegyük most fel, hogy valamilyen $i$-re $x_i = 0$. Ekkor $x_{i+1}^2 = 1 + x_{i-1}x_i = 1$ és $x_{i+2}^2 = 1 + x_ix_{i+1} = 1$, amiből következik, hogy $x_{i+1}$ és $x_{i+2}$ értéke $+1$ vagy $-1$. Egyenlők nem lehetnek, mert ebből $x_{i+3}^2 = 1 + x_{i+1}x_{i+2} = 2$ következne, ami ellentmondás, mert a 2 nem négyzetszám. Marad tehát az az eset, amikor $x_{i+1}$ és $x_{i+2}$ közül az egyik $+1$, a másik $-1$. Ebben az esetben $x_{i+3}^2 = 1 + x_{i+1}x_{i+2} = 0$. Ezekkel az értékekkel az $(i+1)$-edik, $(i+2)$-edik és $(i+3)$-adik egyenlet biztosan teljesül.

Azt kaptuk, hogy az $x_1$, $x_2$, ... sorozatban a 0-k után valamilyen sorrendben egy $+1$ és egy $-1$ következik, majd ismét egy 0; minden harmadik helyen 0 áll. Mivel a ciklus hossza, 1995 osztható 3-mal, ez a sorozat körbeér. A megoldások tehát a következők: minden harmadik $x_i$ értéke 0, vagyis az $x_1 = x_4 = \ldots = x_{1993} = 0$, $x_2 = x_5 = \ldots = x_{1994} = 0$, $x_3 = x_6 = \ldots = x_{1995} = 0$, állítások közül az egyik teljesül, a közbülső elempárok egyik eleme mindig $+1$, a másik $-1$.

*Szente Márk Zsombor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)