a) Az $x^2+y^2=\sqrt{2}$ egyenletű körön racionális pont nyilván nincs.

b) A $\left(\sqrt{2};0\right)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete: $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$. Legyen ennek egy pontja $\left(\frac{p}{q};\frac{s}{q}\right)$, ahol p, q, s egészek és $q\neq 0$. A kör egyenletébe behelyettesítve: $\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{s}{q}\right)^2=2$, amiből $p^2+s^2=2\sqrt{2}\cdot p\cdot q$. Mivel $\sqrt{2}$ irracionális, ez csak úgy lehetséges, ha $p=0$ és $s=0$. Tehát ezen a körön csak egy racionális pont van, a $(0;0)$.

c) A $\left(0;\sqrt{2}\right)$ középpontú, az $(1;0)$ és $(-1;0)$ pontokon átmenő körön pontosan 2 racionális pont van, éspedig a megadottak. Ha ugyanis lenne egy harmadik racionális pont is, akkor a kör középpontja is racionális lenne, és ez ellentmondás. A középpontra vonatkozó állításunkat a megoldás d) részében fogjuk igazolni.

d) Először bebizonyítjuk, hogy ha egy körön három racionális pont van, akkor a középpont is racionális. Írjuk fel ugyanis a három pont meghatározta szakaszok közül kettő felező merőlegesének az egyenletét. Ez egy racionális együtthatós lineáris egyenletrendszert ad, amelynek – tekintve, hogy a 3 pont nincs egy egyenesen – egyetlen racionális megoldása lesz, ami a kör középpontja. A 3 pont közül legfeljebb 2 lehet tükrös a kör középpontjára, ezért van közöttük olyan, amelyiket a középpontra tükrözve egy újabb racionális pontot kapunk a körön. Ezért nincs olyan kör, amelyiken pontosan 3 racionális pont van.

Gröller Ákos (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Véber Miklós (Veszprém, Lovassy L. Gimn.) megmutatta, hogy ha egy körnek van 3 racionális pontja, akkor végtelen sok ilyen pontja van.