A megoldáshoz szükségünk lesz az *út* fogalmára. Az $A_1, \ldots, A_k$ pontok utat alkotnak, ha A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ mindegyike éle a gráfnak. Az A_1 és A_k pontokat az út kezdő- illetve végpontjának nevezzük. Ha az u út végpontja megegyezik a v út kezdőpontjával, akkor uv-vel jelöljük a két út összekapcsolásával keletkező utat.

Ha a gráfban nincs Euler-kör, kész vagyunk; feltételezhetjük, hogy létezik egy E_0 Euler-kör. Mint ismeretes, ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf összefüggő, és minden pont foka páros legyen.[1]pl. Reiman István: *A geometria és határterületei* (321–322. o.) vagy Hajnal–Nemetz–Pintér–Urbán: *Matematika (B fakt.) IV. oszt.* 204–206. o. (Tankönyvkiadó, 1982).

A feladatot több esetre bontjuk attól függően, hogy a gráfban milyen fokszámú pontok vannak.

I. eset: ha van legalább hatodfokú pont. Tekintsünk egy ilyen pontot, legyen ez P, a foka $2k$. Az E_0 Euler-kör pontosan k alkalommal megy át ezen a ponton, tehát létezik k darab olyan út, amelynek kezdő- és végpontja is P, továbbá ezek az utak minden élt pontosan egyszer tartalmaznak. Jelölje ezeket az utakat $u_1,\ldots,u_k$; jelölje az u_i megfordításával keletkező utat u_i^{-1}. Mivel a gráf egyszerű, ezek az utak legalább három élből állnak, és emiatt a megfordítással keletkező utak biztosan különböznek az eredetiektől. Az $u_1, \ldots, u_k$, $u_1^{-1}, \ldots, u_k^{-1}$ utak tehát különbözők. Ekkor viszont fel tudunk sorolni legalább négy különböző Euler-kört: $u_1u_2u_3\ldots u_k$, $u_1u_2^{-1}u_3\ldots u_k$, $u_1u_2u_3^{-1}\ldots u_k$, $u_1u_2^{-1}u_3^{-1}\ldots u_k$. Az állítás tehát igaz.

II. eset: ha van legalább két negyedfokú pont. Legyen P és Q két negyedfokú pont. Az E_0 kör mindkét ponton kétszer megy át, ez kétféle sorrendben lehetséges: $P-P-Q-Q$ vagy $P-Q-P-Q$. (A többi eset a kör pontjainak ciklikus cseréjével ebbe megy át.)

A $P-P-Q-Q$ eseben az E_0 kört felbonthatjuk az u_{pp}, u_{pq}, u_{qq}, u_{qp} utakra, amelyeknek az indexükben megjelölt pontok a végpontjaik. Most is fel tudunk sorolni négy különböző Euler-kört: $u_{pp}u_{pq}u_{qq}u_{qp}$, $u_{pp}u_{pq}u_{qq}^{-1}u_{qp}$, $u_{pp}u_{qp}^{-1}u_{qq}u_{pq}^{-1}$, $u_{pp}u_{qp}^{-1}u_{qq}^{-1}u_{pq}^{-1}$.

A $P-Q-P-Q$ esetben az E_0 kört az $u_{pq}, u_{qp}, v_{pq}, v_{qp}$ utakra bontjuk fel, amelyek közül u_{pq} és v_{pq} P-ből Q-ba, u_{qp} és v_{qp} Q-ból P-be halad. Ebben az esetben is létezik négy különböző Euler-kör: $u_{pq}u_{qp}v_{pq}v_{qp}$, $u_{pq}u_{qp}v_{qp}^{-1}v_{pq}^{-1}$, $u_{pq}v_{qp}v_{pq}u_{qp}$, $u_{pq}v_{qp}v_{qp}^{-1}u_{pq}^{-1}$.

III. eset: ha a gráfban minden pont másodfokú. Ebben az esetben az Euler-kör egyértelmű, legfeljebb csak a körüljárás irányát választhatjuk meg. Az Euler-körök száma tehát egy.

IV. eset: ha az egyik pont negyedfokú, a többi pedig (legfeljebb) másodfokú. Legyen P a negyedfokú pont. Ezen az E_0 kör kétszer megy át, ezért P a kört az u és v utakra (körökre) bontja. Tekintsünk egy Euler-kört. Ez szintén tartalmazza az u és v köröket, csupán ezek sorrendje és a körüljárásuk iránya lehet más. A kezdőpont és az irány megválasztásával elérhetjük, hogy először u-t járja be ugyanolyan sorrendben, ezután pedig v-t; itt kétféle körüljárás lehetséges. Ez pedig azt jelenti, hogy pontosan két Euler-kör van: uv és uv^{-1}.

Minden esetet megvizsgáltunk, az Euler-körök száma sohasem lehet pontosan három.

[1]1