I. megoldás. Először azt igazoljuk, hogy $c>1$. Ehhez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$c=\frac{b+\frac{1}{b^3}}{2}\geq\sqrt{b\cdot\frac{1}{b^3}}=\frac{1}{b}>1.$$

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy $a>1$. Ha ugyanis $a\leq 1$ lenne, akkor

$$b=\frac{a+\frac{1}{a^3}}{2}\geq\sqrt{a\cdot\frac{1}{a^3}}=\frac{1}{a}\geq 1 \tag{1}$$

lenne.

A $c<a$ egyenlőtlenség igazolásához fejezzük ki c-t is a segítséel:

$$c=\frac{b+\frac{1}{b^3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{a+\frac{1}{a^3}}{2}+\frac{1}{\left(\frac{a+\frac{1}{a^3}}{2}\right)^3}\right].$$

A bizonyítandó egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{a+\frac{1}{a^3}}{2}+\frac{1}{\left(\frac{a+\frac{1}{a^3}}{2}\right)^3}\right]<a.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $4a^3$-nel, majd $(a^4+1)^3$-nel, rendezzük a tagokat egy oldalra, majd a kapott kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$\begin{gathered}
a^4+1+\frac{16a^{12}}{(a^4+1)^3}<4a^4\\
0<\left(3a^4-1\right)\left(a^4+1\right)^3-16a^{12}\\
0<3a^{16}-8a^{12}+6a^8-1\\
0<\left(a^4-1\right)^3\left(3a^4+1\right).
\end{gathered}$$

Ez az egyenlőtlenség pedig $a>1$ miatt triviálisan teljesül.

II. megoldás. A $c>1$ egyenlőtlenséget az előző megoldás szerint igazoljuk. Az (1) becslést kissé módosítva írjuk fel:

$$ab=\frac{a^2+\frac{1}{a^2}}{2}\geq\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=1.$$

A számtani és mértani közép között csak akkor állhatna egyenlőség, ha $a^2=1$, vagyis $a=1$ lenne. Ebből viszont b definíciója szerint az is következne, hogy $b=1$, ami ellentmond a $b<1$ feltételnek. Ezt az esetet a feladat nem kívánja vizsgálni. Tehát $ab>1$ és $a>\frac{1}{b}>1>b$.

Az $a>c$ egyenlőtlenség helyett a vele ekvivalens $ab>bc$ egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$\begin{gathered}
ab>bc\\
\frac{a^2+\frac{1}{a^2}}{2}>\frac{b^2+\frac{1}{b^2}}{2}\\
\frac{a^4b^2+b^2-a^2b^4-a^2}{2a^2b^2}>0\\
(a^2-b^2)(a^2b^2-1)>0.
\end{gathered}$$

Mivel mindkét tényező pozitív, ez az állítás is igaz.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)