Az egyszerűség kedvéért legyen $x_n = \overline{aaa\dots ab}$, ahol az „$a$" jegyek száma n.

Két esetet vizsgálunk attól függően, hogy x_1 és a 10 relatív prímek-e.

Ha x_1 és 10 nem relatív prímek, akkor van egy közös prímosztójuk (ami csak a 2 vagy az 5 lehet). Ez a prímosztó viszont mindegyik x_n-nek osztója, mert

$$x_n = x_1 + 10 \cdot \left(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{n-1}\right) a.$$

Ha x_1 és 10 relatív prímek, akkor bebizonyítjuk, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész van, amelyre x_n osztható x_1-gyel. Ehhez először megmutatjuk, hogy létezik olyan m pozitív egész, amelyre $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{m-1}$ osztható x_1-gyel.

Válasszunk az $y_1 = 1$, $y_2 = 11$, $y_3 = 111$, $\dots$ sorozatból két olyan elemet, amelyik x_1-gyel osztva ugyanannyi maradékot ad. (Ilyen tagok léteznek, mert a sorozatnak végtelen sok tagja, maradéka viszont csak véges sok féle van.) Legyen ez a két tag y_k és y_l, ahol $k < l$. A választás szerint

$$y_i - y_k = 10^{l-1} + 10^{l-2} + \dots + 10^k = 10^k \left(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{l-k-1}\right)$$

osztható x_1-gyel. Mivel x_1 és a 10 relatív prímek, x_1 relatív prím a kiemelt 10^k tényezőhöz, tehát osztója kell legyen $\left(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-l-1}\right)$-nek. Mindez azt jelenti, hogy $m = l - k$ megfelelő.

Legyen tehát m olyan pozitív egész, amelyre $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{m-1}$ osztható x_1-gyel. Ekkor minden k pozitív egészre

$$x_{km+1} = x_1 + \left(10^2 + 10^3 + \dots + 10^{km+1}\right) a =$$
$$= x_1 + 100a \left(1 + 10^m + 10^{2m} + 10^{3m} + \dots + 10^{(k-1)m}\right) \left(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{m-1}\right)$$

osztható x_1-gyel, tehát összetett.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás második részét másképpen is el lehet mondani. Ha x_1 és 10 relatív prímek, akkor a $9x_1$ és a 10 is relatív prímek, és az Euler–Fermat-tétel szerint $10^{\varphi(9x_1)} - 1$ osztható $9x_1$-gyel. Ebből viszont következik, hogy

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{\varphi(9x_1)-1} = \frac{10^{\varphi(9x_1)} - 1}{9}$$

osztható x_1-gyel.

2. Ha $b > 1$, akkor x_1 helyett számolhattunk volna b-vel is. A $b = 1$ esetet azonban így is meg kellett volna vizsgálnunk.

3. A bizonyítás b-nek sok értékére egyszerű, például ha b páros, $b = 5$ vagy b osztható 3-mal. Még a $b = 7$ eset sem nehéz. A $b = 1$ eset azonban további esetszétválasztást igényel, vagy pedig a látott gondolatmenet alkalmazását.