I. megoldás. Az állítást indirekten igazoljuk. Tegyük fel, hogy az állítás hamis. Ekkor az x, y, z számokra a következő három egyenlőtlenség teljesül:

$$|x| < |y - z|; \qquad |y| < |z - x|; \qquad |z| < |x - y|.$$

Ez a feltétel x, y, z-re szimmetrikus, ezért elég azt az esetet vizsgálni, amikor $x \le y \le z$. Ekkor a jobb oldalon az abszolút érték helyett írhatjuk:

$$|x| < z - y; \qquad |y| < z - x; \qquad |z| < y - x.$$

Adjuk össze az első és a harmadik egyenlőtlenséget:

$$|x| + |z| < z - x.$$

Mivel $z - x \le |z| + |x|$, ez ellentmondás.

Ugron Balázs (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Grafikusan oldjuk meg a feladatot. Ha x, y és z előjelét felcseréljük, a bizonyítandó állítás nem változik. Feltehetjük tehát, hogy $z \ge 0$.

Legyen z rögzített, és ábrázoljuk a kétdimenziós x, y tengelyű koordináta-rendszerben azokat az $(x;\ y)$ számpárokat, amelyekre a két előírt egyenlőtlenség teljesül.

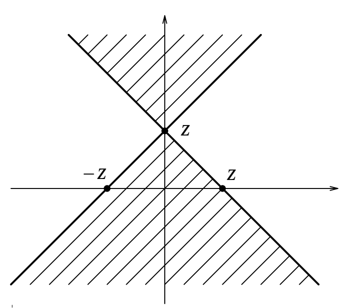
1. Az $|x| < |y - z|$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $y > |x| + z$ vagy $y < -|x| + z$. Az ilyen tulajdonságú pontok az *1. ábra* bevonalkázott (nyílt) tartományának pontjai.

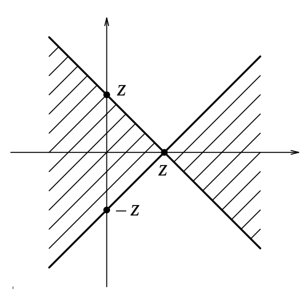
2. Az $|y| < |z - x|$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $x > |y| + z$ vagy $x < -|y| + z$. Az ilyen tulajdonságú pontok a *2. ábra* bevonalkázott (szintén nyílt) tartományának pontjai.

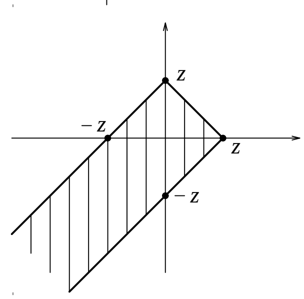
Mivel mindkét feltételnek teljesülnie kell, az $(x;\ y)$ pontnak a két tartomány metszetében kell lennie. A metszet tartomány látható a *3. ábrán.* (Ha $z = 0$, akkor a tartomány üres.)

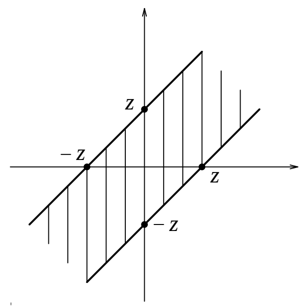
Végül a *4. ábrán* látható az $|z| \ge |x - y|$, azaz $x - |z| \le y \le x + |z|$ tartomány. (Ez a tartomány zárt.) Látható, hogy ez tartalmazza az előbbi metszet tartományt, vagyis minden olyan $(x;\ y)$ számpárra, amelyre teljesülnek az $|x| < |y - z|$ és $|y| < |z - x|$ egyenlőtlenségek, teljesül az $|z| \ge |x - y|$ egyenlőtlenség is.

Farkas Péter (Budapest, Szent István Gimn., IV. o.t.)









Z
− Z
Z
− Z