I. megoldás. Az $f(n)=n+2$ függvény megfelelő, mert értékei pozitív egészek, és tetszőleges n pozitív egészre

$$f\left(f(n)\right)+f(n)=((n+2)+2)+(n+2)=2n+6.$$

Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Az f függvény biztosan injektív, azaz $n\neq m$ esetén $f(n)\neq f(m)$. Ha ugyanis $f(n)=f(m)$, akkor $f\left(f(n)\right)=f\left(f(m)\right)$ és $2n+6=f\left(f(n)\right)+f(n)=f\left(f(m)\right)=f(m)=2m+6$, amiből következik, hogy $n=m$. Az injektivitás következménye, hogy $n\leq h$ esetén $f(n)=1$, $f(n)=2$ vagy $f(n)\geq h$.

Most meghatározzuk $f(1)$ értékét. Ha (1)-et felírjuk $n=1$-re, megállapíthatunk $f(1)$-re egy felső korlátot:

$$f(1)=8-f\left(f(1)\right)\leq 8-1=7.$$

Az $f(1)=3$ állítás bizonyításához tehát hat esetet kell kizárni.

I. eset: $f(1)=1$. Ekkor $f\left(f(1)\right)=1$ és $f\left(f(1)\right)+f(1)=2\neq 2\cdot 1+6$.

II. eset: $f(1)=2$. Ekkor

$$f(2)=f\left(f(1)\right)=2\cdot 1+6-f(1)=6, f(6)=f\left(f(2)\right)=2\cdot 2+6-f(2)=4, f(4)=f\left(f(6)\right)=2\cdot 6+6-f(6)=14, f(14)=f\left(f(\right.$$

Ez ellentmond annak, hogy $f(14)$ pozitív.

Hasonló ellentmondásra vezet az $f(1)=4$, 5, 6 és 7 kiindulás, vagy negatív, vagy kétértékű függvényt kapunk legfeljebb a harmadik lépésben. (ld. az 1. Megjegyzést a feladat végén.)

Abból, hogy $f(1)=3$, következik, hogy minden páratlan n-re $f(n)=n+2$. Ez $n=1$-re, mint láttuk, igaz. Ha pedig valamely n-re $f(n)=n+2$, akkor $f(n+2)=f\left(f(n)\right)=2n+6-f(n)=2n+6-(n+2)=n+4$.

Most meghatározzuk $f(2)$ értékét is. Ha (1)-et $n=2$-vel írjuk fel, azt kapjuk, hogy $f(2)=10-f\left(f(2)\right)\leq 10-1=9$. Az is biztos, hogy $f(2)$ nem lehet 1-nél nagyobb páratlan szám, mert ezeket a függvény a páratlan helyeken felveszi, és ez ellentmondana az injektivitásnak. Az $f(2)$ lehetséges értékei tehát a 4-en kívül már csak 1, 2, 6 és 8. Most ezeket zárjuk ki:

I. eset: $f(2)=1$. Ekkor $f(1)=f\left(f(2)\right)=2\cdot 2+6-f(2)=9$, ami ellentmond annak, hogy $f(1)=3$.

Hasonlóan ellentmondásra jutunk $f(2)=2$, 6 és 8 esetén is.

Abból, hogy $f(2)=4$, ismét következik, hogy minden páros n-re $f(n)=n+2$.

II. megoldás. Azt, hogy $f(n)=n+2$ megfelelő, az előző megoldás szerint ellenőrizhetjük.

Legyen n tetszőleges rögzített pozitív egész. Megmutatjuk, hogy $f(n)=n+2$.

Definiáljuk a következő sorozatot: $a_0=n$, $a_{k+1}=f(a_k)$. Az f függvény értékei pozitív egészek, tehát ez a sorozat pozitív egészekből áll. Legyen továbbá $b_k=a_k-(n+2k)$. A definíció szerint $b_0=0$, és azt akarjuk igazolni, hogy b_1 is 0.

Az (1) egyenlet szerint

$$a_{k+2}+a_{k+1}=2a_k+6,$$

amiből

$$b_{k+2}+b_{k+1}=a_{k+2}-(n+2k+4)+a_{k+1}-(n+2k+2)=a_{k+2}+a_{k+1}-(2n+4k+6)==2a_k+6-(2n+4k+6)=2\left(a_k-(n\right.$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy tetszőleges k nemnegatív egészre

$$b_k=\frac{1-(-2)^k}{3}b_1. \tag{3}$$

Ez $k=0$-ra és $k=1$-re igaz, mert a $b_0=0\cdot b_1=0$, illetve $b_1=b_1$ azonosságokat adja. Ha (3) teljesül $k=m$-re és $k=m+1$-re, akkor teljesül $k=m+2$-re is:

$$b_{m+2}=2b_m-b_{m+1}=2\frac{1-(-2)^m}{3}b_1-\frac{1-(-2)^{m+1}}{3}b_1=$$
$$=\frac{2-2\cdot(-2)^m-1+(-2)^{m+1}}{3}b_1=\frac{1-(-2)^{m+2}}{3}b_1.$$

Ezzel (3)-at igazoltuk.

A b_k sorozat definíciója alapján $b_k\geq 1-n-2k$. Ebből (3) alapján alsó és felső becsléseket nyerhetünk b_1-re, ha k helyére valamilyen páratlan, illetve páros számot írunk. Legyen m pozitív egész; $k=2m+1$, illetve $k=2m$ helyettesítéssel

$$-1-n-4m\leq b_{2m+1}=\frac{1+2^{2m+1}}{3}b_1, 1-n-4m\leq b_{2m}=\frac{1+2^{2m}}{3}b_1.$$

Az első egyenlőtlenségben b_1 együtthatója pozitív, a másodikban negatív. Ha leosztunk vele, az első egyenlőtlenség iránya megváltozik, a másodiké nem. Ezzel a következő becslést kapjuk:

$$-\frac{3(n+4m+1)}{1+2^{2m+1}}\leq b_1\leq\frac{3(n+4m-1)}{2^{2m}-1}.$$

Ha most $m \to \infty$, akkor az alsó és a felső becslés is 0-hoz tart, tehát $b_1 = 0$.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) és *Valkó Benedek* Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A második megoldás valójában az elsőnek egy általánosított változata. Az első megoldás esetszétválasztásait egyszerre számoltuk ki. Például ha $f(1) = x$, akkor a függvényegyenlet alapján megállapíthatjuk, hogy $f(x) = 8 - x$, $f(8 - x) = 3x - 2$, $f(3x - 2) = 24 - 5x$, $f(24 - 5x) = 11x - 22$, $f(11x - 22) = 76 - 21x$ stb. Ahhoz, hogy az utolsó két szám pozitív egész legyen, szükséges, hogy $11x - 22 \geq 1$ és $76 - 21x \geq 1$, azaz $2\frac{1}{11} \leq x \leq 3\frac{4}{7}$ legyen. Ebben az intervallumban az egyetlen egész szám a 3.

2. A második megoldás akkor is működik, ha az f függvény pozitív *valós* számok halmazát képezi önmagára. Ilyenkor is $f(x) = x + 2$ az egyetlen megoldás.