I. megoldás. Tekintsük a következő táblázatot:

$$3 3^2 3^3 3^4 \dots 3^{99} 3^{100} 3^2 3^3 3^4 \dots 3^{99} 3^{100} 3^3 3^4 \dots 3^{99} 3^{100} 3^4 \dots 3^{99} 3^{100} \ddots 3^{99} 3^{100} 3^{100}$$

Ha minden oszlopban összeadjuk a számokat, éppen (1) tagjait kapjuk. A feladat tehát a táblázatban levő számok összegének meghatározása.

Adjuk össze a számokat előbb soronként, majd összegezzük a sorösszegeket! Ez azért előnyös, mert minden sorban egy-egy mértani sorozat tagjai állnak. A k-adik sorban levő számok összege a mértani sorozat összegképlete szerint:

$$3^k + 3^{k+1} + \dots + 3^{100} = 3^k \frac{3^{101-k} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{101} - 3^k}{2},$$

a sorösszegek összege pedig – ismét felhasználva a mértani sorozat összegképletét –

$$\frac{3^{101} - 3^1}{2} + \frac{3^{101} - 3^2}{2} + \dots + \frac{3^{101} - 3^{100}}{2} = 50 \cdot 3^{101} - \frac{3}{2}\left(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{99}\right) =$$
$$= 50 \cdot 3^{101} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{100} - 1}{3 - 1} = \frac{199 \cdot 3^{101} + 3}{4}.$$

II. megoldás. Tekintsük az $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100}$ polinomot. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$x \cdot f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 100x^{100},$$

tehát a feladat $3 \cdot f'(3)$ értékének meghatározása. (f' az f polinom deriváltja.)

A mértani sorozat összegképlete szerint $x \neq 1$ esetén

$$f(x) = \frac{x^{101} - 1}{x - 1},$$

és

$$xf'(x) = x\frac{101x^{100}(x-1) - \left(x^{101} - 1\right)}{(x-1)^2} = \frac{100x^{102} - 101x^{101} + x}{(x-1)^2}.$$

Behelyettesítve $x = 3$-at:

$$3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{100} = \frac{100 \cdot 3^{102} - 101 \cdot 3^{101} + 3}{4} = \frac{199 \cdot 3^{101} + 3}{4}.$$

Megjegyzés. Mindkét megoldás módszerével igazolható, hogy ha n pozitív egész és $q \neq 1$, akkor

$$q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \dots + n \cdot q^n = q\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}.$$