Megmutatjuk, hogy a négy pont vagy egy körre, vagy egy egyenesre illeszkedik. Az AB és CD szakaszoknak mindenképpen van közös pontja, egyébként lenne olyan S sík, amelyik a szakaszokat elválasztja. Ekkor pedig az AB és CD szakaszokra illeszthető egy-egy olyan gömb, amelyik az S síkot érinti, s ezért nem metszhetik egymást. Egy ilyen, az A, B pontokon átmenő gömb O középpontját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Az AB egyenes közös pontja az S síkkal legyen P. A P körüli $r = \sqrt{PA \cdot PB}$ sugarú, S-ben lévő kör egy E pontjában az S-re merőleges egyenesnek és AB felező merőleges síkjának közös pontja a keresett O pont (*1. ábra*). Ha AB párhuzamos S-sel, és AB felezőpontjának S-re eső vetülete F, akkor könnyen szerkeszthető pl. egy A és B-n átmenő S-et F-ben érintő gömb. Hasonlóan kaphatunk a C és D pontokra illeszkedő, az S síkot érintő gömböt.

Az A, B, C és D pontok konvex burka nem lehet háromszög vagy az AB, illetve CD valamelyike, mert ezekben az esetekben az A, B illetve C, D pontpárok egyikére illeszkedő gömb tartalmazhatja a másik pontpárra illeszkedő gömböt (*2.* és *3. ábra*).

Az eddigiekben megállapítottuk, hogy ha a négy pont egy egyenesen van, akkor A, B elválasztja C, D-t, ha pedig nincs egy egyenesen, akkor az AB és CD szakaszok egy belső pontjukban metszik egymást. Bebizonyítjuk, hogy az utóbbi esetben a négy pont húrnégyszöget alkot. Tegyük fel, hogy a D pont nincs rajta az ABC háromszög köré írt O középpontú körön. Ez esetben a CD szakasz felezőmerőlegesének és az OC egyenesnek a Q közös pontja körüli QC sugarú gömb nem metszi (hanem érinti) az O közepű OA sugarú gömböt, ami ellentmond a feltételnek (*4. ábra*).

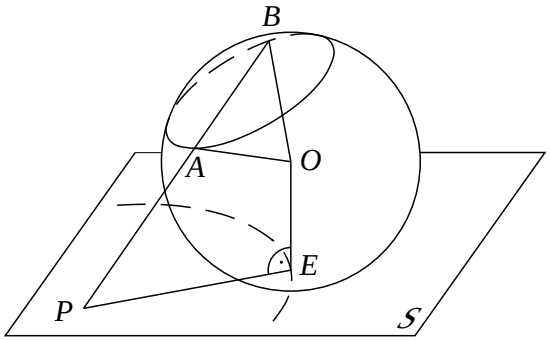
Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az A, B, C, D pontnégyes csak akkor rendelkezik a feladatbeli tulajdonságokkal, ha egy körön, vagy egy egyenesen van, mégpedig úgy, hogy az A, B pontpár elválasztja a C, D pontpárt.

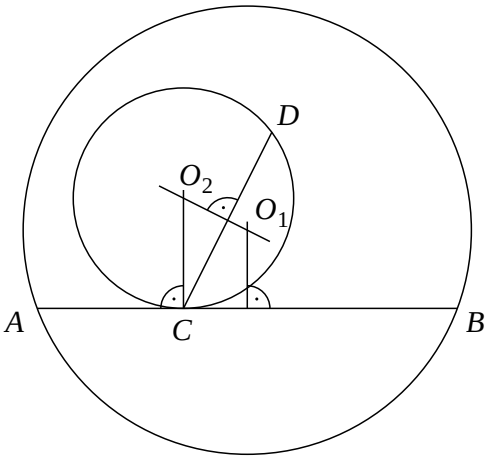
Bebizonyítható, hogy a most kimondott feltételek elegendőek. Ha a pontnégyes egy egyenesen van, akkor a feladatbeli feltételek teljesülése triviális. Az is nyilvánvaló, hogy az A, B és C, D pontpárok egyikére illeszkedő sík metszi a másik pontpárra illeszkedő síkot vagy gömböt. Megmutatjuk, hogy ha a négy pont egy körön van és A, B elválasztja C, D-t, akkor minden, az A, B pontokon átmenő gömb metsz minden, a C, D pontokon átmenő (az előbbiektől különböző) gömböt. Nézzük ehhez az *5. ábrát*. Elég belátnunk, hogy az AB szakasz f felezőmerőlegesének bármely O-tól különböző Q pontja körüli $r = QA$ sugarú körlemez a C, D pontok közül pontosan az egyiket tartalmazza; ekkor ugyanis az A, B pontokon átmenő gömb metszi a C, D pontokon átmenő bármelyik gömböt. Az AB és CD metszéspontja legyen P, ez a k_1 és k_2 körök mindkettejének belső pontja. Legyenek a CD egyenes és k_2 közös pontjai E és F. Ekkor a P pont k_1-re, illetve k_2-re vonatkozó hatványa:

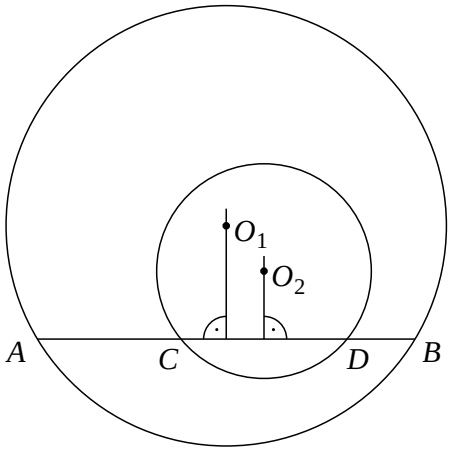
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF. \tag{1}$$

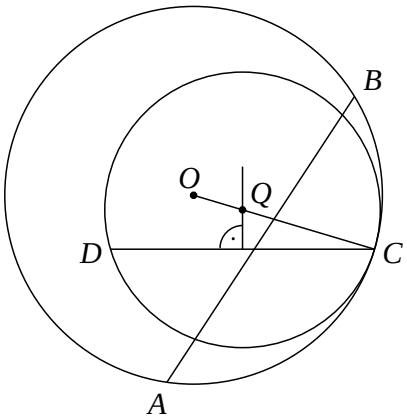
Mivel P elválasztja mind a C, D mind az E, F pontokat, feltehetjük, hogy E a PC félegyenesen, és így F a PD félegyenesen van. Ha most $PC > PE$, akkor (1) szerint $PD < PF$, tehát C a k_2 kör külső, D pedig belső pontja. Hasonló a helyzet a $PC < PE$ esetben ($PC = PE$ nem lehetséges, mert akkor $k_1 \equiv k_2$, azaz $O \equiv Q$ lenne).

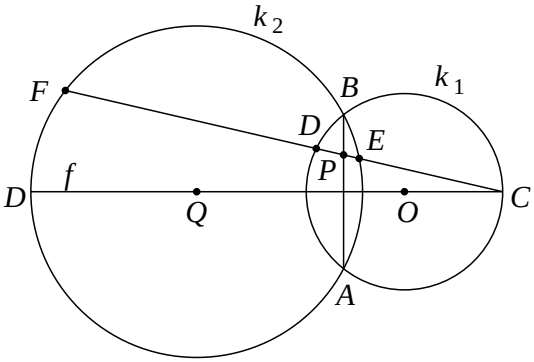
Tehát egy pontnégyes akkor és csak akkor rendelkezik a feladatban megfogalmazott tulajdonságokkal, ha a négy pont egy körön, vagy egy egyenesen van, és az A, B pontpár elválasztja a C, D pontpárt.






O_1
O_2
A
C
D
B


B
O
Q
D
C
A


k_2
k_1
F
B
D
E
P
f
D
Q
O
C
A