1. megoldás. A $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ azonosság alapján a megoldandó egyenlet így írható:

$$\sin(\pi\cdot\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\sin x\right).$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\pi\cdot\cos x=\frac{\pi}{2}+\pi\sin x+2\cdot k\cdot\pi(1) vagy \pi\cdot\cos x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\pi\sin x\right)+2\cdot k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbf{Z}).(2)$$

A két „vagy”-gyal kapcsolt egyenletet külön-külön kell megoldanunk, ezért mindkettőben k-val jelölhető a felvett paraméter. Az (1) és (2) egyenleteket a következőképpen írhatjuk:

$$\cos x-2k-\frac{1}{2}=\sin x,(3)\cos x-2k-\frac{1}{2}=-\sin x,(4)$$

és e két egyenlet diszjunkciója ekvivalens az eredeti egyenlettel. A (3) egyenletet négyzetre emelve, majd a $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ azonosságot alkalmazva:

$$\cos^2 x+\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2k+\frac{1}{2}\right)\cos x=1-\cos^2 x.$$

Ebből

$$2\cdot\cos^2 x-(4k+1)\cos x+\left(4k^2+2k-\frac{3}{4}\right)=0. \qquad (5)$$

Nyilvánvaló, hogy a (4) egyenlet négyzetre emelésével ugyancsak (5)-höz jutunk, ezért (3) és (4) diszjunkciója ekvivalens (5)-tel.

(5) diszkriminánsa: $D=(4k+1)^2-4\cdot 2\left(4k^2+2k-\frac{3}{4}\right)=-16k^2-8k+7$, ami csak $k=0$ esetén lesz nemnegatív, amikor $D=7$. Tehát (5) és egyben az eredeti egyenlet valós megoldásait a $\cos x=\frac{4k+1\pm\sqrt{7}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$ egyenletekből kapjuk. Ebből $\cos x=0,9114$ vagy $\cos x=-0,4114$, ahonnan $x=\pm 0{,}4240+2m\cdot\pi$; ill. $x=\pm 1{,}995+2m\cdot\pi$ ($m\in\mathbf{Z}$) az összes megoldások. Az említett ekvivalenciák miatt ezek a megoldások kielégítik az eredeti egyenletet.

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az első megoldás (3) egyenletéből $\cos x-\sin x=2k+\frac{1}{2}$. Ezt $\frac{1}{\sqrt{2}}$-vel szorozva:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x=\frac{4k+1}{2\cdot\sqrt{2}},\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x=\frac{4k+1}{2\cdot\sqrt{2}}, azaz \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{4k+1}{2\cdot\sqrt{2}}.(6)$$

Ennek az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $\left|\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}\right|\le 1$, amiből következik, hogy $k=0$. Ezután (6)-ból:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Hasonlóan (4)-ből

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}.$$

A két utóbbi egyenletből kapjuk a már ismert megoldásokat.

Lovász Zoltán, (Bonyhád, Perczel Mór Közg. Szki., IV. o.t.)

Megjegyzés: Lovász Zoltán a II. megoldás módszerével megoldotta a $\sin(a\cdot\cos x)=\cos(b\cdot\sin x)$ egyenletet.