I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n=1$, akkor mindkét oldalon $\frac{1}{2}$ áll, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n=k$-ra (1) teljesül, azaz

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy ebből az állítás $n=k+1$-re is következik, azaz

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \tag{3}$$

Ehhez elég bebizonyítani, hogy

$$\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}}, \tag{4}$$

mert a (3) egyenlőtlenség éppen (2) és (4) szorzata.

Mivel (4) mindkét oldalán a számláló és a nevező is pozitív, beszorozhatunk és négyzetre emelhetünk:

$$(2k+1)^2(3k+4)\le(2k+2)^2(3k+1); 12k^3+28k^2+19k+4\le 12k^3+28k^2+20k+4,$$

ami $k\ge 0$ miatt triviális. Ezzel (4)-et és az állítást igazoltuk.

II. megoldás. A *Wallis-formula* szerint minden pozitív egész n-re

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}. \tag{5}$$

(A formula bizonyítása megtalálható pl. Császár Ákos: Valós analízis I., 310–311.)

Jelöljük (5) bal oldalát a_n-nel, jobb oldalát b_n-nel, (1) bal oldalát c_n-nel. A bizonyítás arra épül, hogy a_n és b_n hasonlít c_n négyzetére, nevezetesen

$$c_n^2=\frac{1}{(2n+1)a_n}=\frac{1}{2nb_n}.$$

Ezt összevetve az (5)-beli egyenlőtlenségekkel azt kapjuk, hogy

$$c_n^2>\frac{1}{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi n+\frac{\pi}{2}}\qquad\text{és}\qquad c_n^2<\frac{1}{2n\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi n},$$

vagyis

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n+\frac{\pi}{2}}}<c_n<\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ha $n\ge 8$, akkor $\pi n=3n+(\pi-3)n>3n+0,125\cdot 8=3n+1$, tehát a most bizonyított felső becslés jobb, mint a feladatbeli. Az $n=1, 2, \ldots, 7$ értékekre pedig az állítás behelyettesítéssel ellenőrizhető.

Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)