Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k pozitív egészhez léteznek olyan $x_1, \ldots, x_k$ pozitív egészek, amelyekre

$$x_1 + S(x_1) = x_2 + S(x_2) = \ldots = x_k + S(x_k). \tag{1}$$

Ez a $k = 3$ esetben megválaszolja a feltett kérdést.

Állításunkat teljes indukcióval fogjuk igazolni. A $k = 1$ esetben nyilván bármilyen x_1 megfelelő.

Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_k$ olyan számok, amelyekre (1) teljesül. Konstruálni fogunk olyan $y_1, \ldots, y_{k+1}$ számokat, amelyekre

$$y_1 + S(y_1) = y_2 + S(y_2) = \ldots = y_{k+1} + S(y_{k+1}).$$

Legyen q olyan pozitív egész, amelyre 10^q nagyobb, mint $x_i + S(x_i)$, és p egyelőre tetszőleges pozitív egész, a egy számjegy. (Ezeket később pontosan definiáljuk.) Legyen $A = ((10^p - 1) \cdot 10 + a) \cdot 10^q$; ennek a számnak a 10-es számrendszerbeli alakja $99\ldots 9a00\ldots 0$, ahol a 9-esek száma p, a 0-k száma q, továbbá $y_1 = A + x_1$, $y_2 = A + x_2$, $\ldots$, $y_k = A + x_k$, és $y_{k+1} = 10^{p+q+1}$.

Könnyű ellenőrizni, hogy $y_{k+1} + S(y_{k+1}) = 10^{p+q+1} + 1$, és $1 \le i \le k$ esetén

$$y_i + S(y_i) = (A + x_i) + (p \cdot 9 + a + S(x_i)) = (x_i + S(x_i)) + 10^{p+q+1} - 10^{q+1} + 9p + (10^q + 1)a.$$

Az indukciós feltevés szerint ez a szám nem függ i-től. A p és az a értékét úgy kell megválasztanunk, hogy

$$(x_i + S(x_i)) + 10^{p+q+1} - 10^{q+1} + 9p + (10^q + 1)a = 10^{p+q+1} + 1,$$

azaz

$$(x_i + S(x_i)) + (10^q + 1)a + 9p = 10^{q+1} + 1 \tag{2}$$

teljesüljön.

Most definiáljuk az a számjegyet és a p számot. Legyen $0 \le a \le 8$ olyan szám, amelyre

$$(x_i + S(x_i)) + 2a \equiv 2 \pmod 9$$

teljesüljön. (Ilyen a létezik, mert a $0, 2, \ldots, 16$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo 9.) Ezzel az a-val (2) két oldala kongruens modulo 9, ezért létezik olyan p egész szám, amelyre egyenlőség áll. A p pozitív, mert

$$9p = 10^{q+1} + 1 - (x_i + S(x_i)) - (10^q + 1)a > 10^{q+1} + 1 - 10^q - (10^q + 1) \cdot 8 = 10^q - 7 > 0.$$

Találtunk tehát olyan p pozitív egészet és a számjegyet, amelyek esetén

$$y_1 + S(y_1) = y_2 + S(y_2) = \ldots = y_{k+1} + S(y_{k+1}).$$

Ezzel állításunkat igazoltuk, a feladat kérdésére a válasz igenlő.

Megjegyzés. Sok más konstrukció létezik. Még az is teljes megoldás, ha valaki megad egy konkrét számhármast; például

$$x = 999\,999\,999\,999\,891, y = 999\,999\,999\,999\,900, z = 1\,000\,000\,000\,000\,008$$

esetén $x + S(x) = y + S(y) + S(z) = 1\,000\,000\,000\,000\,017$.