Használjuk az *ábra* jelöléseit, ahol $m_c$ az $A_1B_1$ és $A_2B_2$ egyenesek távolsága; hasonló szerepűek az $m_b$ és $m_a$ szakaszok. Az $ABC\triangle$ területe legyen $t$, az $A_2B_2C_2\triangle$ oldalai pedig $a$, $b$, $c$. Az oldalak párhuzamossága miatt az $A_1B_1C_1$ és


$A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlók. Ha a hasonlóság aránya $k$, akkor $\frac{t_1}{t_2} = k^2$, azaz $\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = k$.

Számoljuk ki először az $A_2B_2C_2\triangle$ területét az *ábrán* látható 3 trapéz és az $A_1B_1C_1\triangle$ területének összegeként:

$$t_2 = \frac{a+ka}{2}m_a + \frac{b+kb}{2}m_b + \frac{c+kc}{2}m_c + t_1 == (1+k)\left(\frac{am_a}{2} + \frac{bm_b}{2} + \frac{cm_c}{2}\right) + k^2t_2.$$

Ebből

$$t_2(1-k^2) = (1+k)\left(\frac{am_a}{2} + \frac{bm_b}{2} + \frac{cm_b}{2}\right),$$

és így

$$t_2(1-k) = \frac{am_a}{2} + \frac{bm_b}{2} + \frac{cm_c}{2}. \tag{1}$$

Hasonlóan fölírhatjuk az $ABC\triangle$ területét:

$$t = \frac{k \cdot a}{2} \cdot m_a + \frac{k \cdot b}{2} \cdot m_b + \frac{k \cdot c}{2} \cdot m_c + t_1,$$

amiből

$$\frac{t - k^2 \cdot t_2}{k} = \frac{a \cdot m_a}{2} + \frac{b \cdot m_b}{2} + \frac{c \cdot m_c}{2}. \tag{2}$$

Mivel (1) és (2) jobb oldala azonos, $t_2(1-k) = \frac{t}{k} - k \cdot t_2$, és így $t = k \cdot t_2$. Mivel $k = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$, $t = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \cdot t_2 = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$. Tehát az $ABC\triangle$ területe a másik két háromszög területének mértani közepe.

*Kováts Antal* (Bp., ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o.t.) és *Varga Tamás* (Szigetvár, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.)