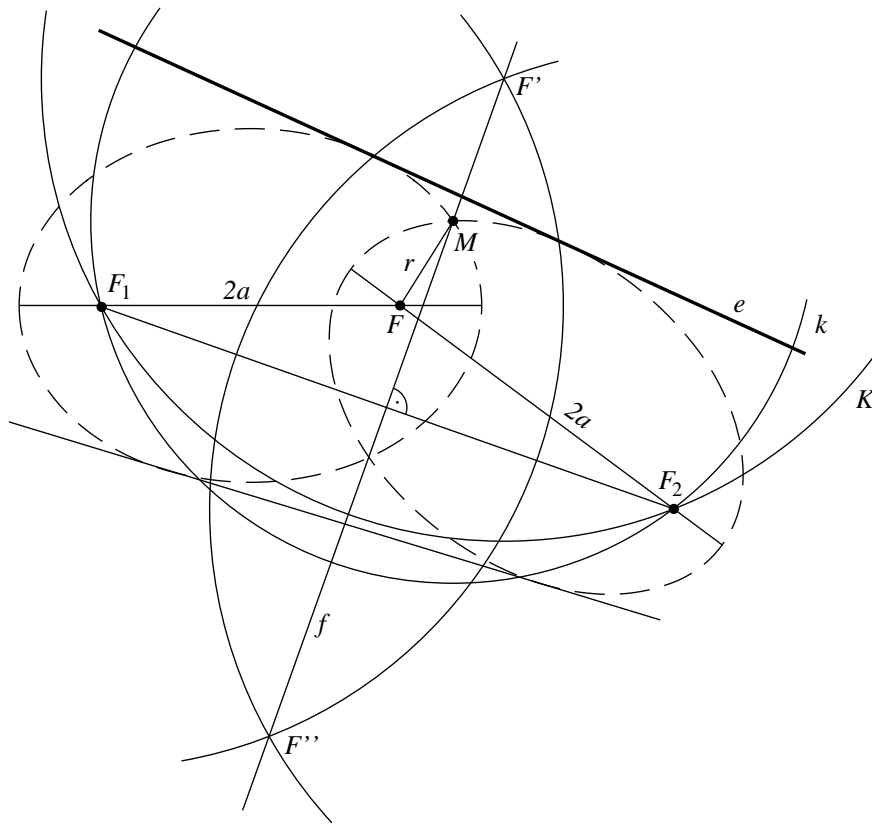


Legyen a két ellipszis közös fókusza  $F$ , nagytenyelyük hossza  $2a$ , az adott metszéspont  $M$ , a közös érintő  $e$ . Az  $MF = r$  jelöléssel – az ellipszis definíciója szerint – a másik két fókusz illeszkedik az  $M$  körüli  $2a - r$  sugarú  $k$  körre. Ismeretes továbbá, hogy ha az ellipszis egyik fókuszát tükrözzük az ellipszis valamelyik érintőjére, akkor a tükörkép a másik fókusz körüli  $2a$  sugarú körön lesz. Ezért, ha  $F$  tükörképe  $e$ -re  $F'$ , akkor a keresett fókuszok – legyenek ezek  $F_1$  és  $F_2$  – rajta vannak az  $F'$  körüli  $2a$  sugarú  $K$  körön. A feladatnak csak akkor van megoldása, ha  $k$  és  $K$  metszik egymást, és a közös pontok  $e$ -nek ugyanazon oldalán vannak, mint  $F$  és  $M$ , és ekkor a metszéspontok  $F_1$  és  $F_2$ . Ha  $k$ -nak és  $K$ -nak nincs közös pontja, az ellipszisek nem léteznek; ha egy közös pont van, akkor a két ellipszis egybeesik, amikor is minden pontjuk és érintőjük közös. Ha valamelyik metszéspont egybeesik  $F$ -vel, akkor az egyik ellipszis kör lesz. Ebben az esetben a két alakzat szimmetrikus az ellipszis nagytenyelyére, tehát a hiányzó adatok tengelyes tükrösképként szerkeszthetők. Ezután azt mondhatjuk, hogy a két ellipszis adott, hiszen fókuszaik és nagytenyelyük ismert.

A két ellipszis bármelyik közös pontja az ellipszis definíciója alapján  $F_1$ -től és  $F_2$ -től – tekintve, hogy  $F$  közös fókusz – egyenlő távolságra van. Ezért a közös pontok illeszkednek az  $F_1F_2$  szakasz  $f$  felező merőlegesére. Ezért elegendő  $f$  és az egyik ellipszis közös pontjait megszerkeszteni. Vegyük ehhez például az  $\frac{a}{b}$  arányú merőleges affinitást. Ebben az affinitásban az ellipszis képe a főkör,  $f$  képe legyen  $f'$ . A főkör és  $f'$  közös pontjai legyenek  $M_1$  és  $M_2$ . Az  $F_1F$  tengelyű  $\frac{b}{a}$  arányú affinitásban  $M_1$  és  $M_2$  egyikének a képe  $M$ , a másiké a hiányzó közös pont.



Már korábban megállapítottuk, hogy az  $F$  pontnak  $e$ -re vonatkozó  $F'$  tükörképe az  $F_1$  és  $F_2$  pontoktól  $2a$  távolságra van. Legyen az  $F_1$  és  $F_2$  körüli  $2a$  sugarú körök másik metszéspontja  $F''$ . Az  $FF''$  szakasz felező merőlegesére a hiányzó közös érintő.

A szerkesztés akkor és csak akkor végezhető el, ha a  $k$  és  $K$  körök metszik egymást, és közös pontjaik, valamint az ugyancsak különböző  $F$  és  $M$  pontok az  $e$  egyenesnek ugyanabban a (nyitott) félsíkjában vannak. Ez esetben a két ellipszis egyértelműen megszerkeszthető, két metszéspontjuk és két közös érintőjük lesz.

*Rozsnyai Ádám* (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.) és *Véber Miklós* (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o.t.)