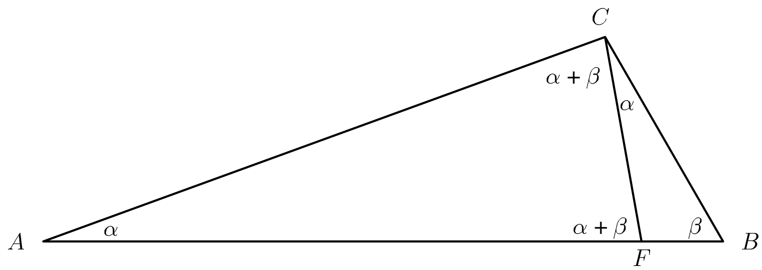
I. megoldás. A feltételből azonnal következik, hogy $\gamma = 2\alpha + \beta$. Ebből pedig látjuk, hogy $\gamma > \beta$, és akkor $c > b$. Ennek megfelelően készült az *ábra*, amelynek γ szögét a CF egyenessel felosztottuk $\alpha + \beta$ és α nagyságú szögekre. A feltétel alapján $AFC\sphericalangle = \alpha + \beta$, hiszen a $CBF\triangle$ külső szöge. Ezért az $AFC\triangle$ egyenlő szárú, amiért $AF = b$ és $FB = c - b$. Könnyen látható, hogy $ABC\triangle \sim CBF\triangle$, ugyanis a két háromszög szögei páronként egyenlők. Tehát a megfelelő oldalak aránya is megegyezik: $\dfrac{c-b}{a} = \dfrac{a}{c}$, amiből $a^2 + bc - c^2 = 0$, amint azt bizonyítani kellett.



Fejes Tóth Péter (Bp., Árpád Gimn., III. o.t.) és *Lovász Zoltán* (Bonyhád, Perczel Mór Közg Szki., IV. o.t.)

II. megoldás. A szinusztétel alapján $a = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$, illetve $c = \dfrac{b \cdot \sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. Az a és c ezen kifejezéseivel:

$$a^2 + bc - c^2 = b^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + b^2 \cdot \frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta} - b^2 \cdot \frac{\sin^2(2\alpha+\beta)}{\sin^2\beta} == \frac{b^2}{\sin^2\beta} \cdot \left[\sin^2\alpha + \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta) - \sin^2(2\alpha+\beta)\right].$$

Ezek után azt kell megmutatnunk, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés értéke zérus. Ezt – ismert összefüggéseket és a feltételt fölhasználva – így láthatjuk be:

$$[\sin\alpha + \sin(2\alpha+\beta)][\sin\alpha - \sin(2\alpha+\beta)] + \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta) == \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta) + 2 \cdot \sin\frac{3\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2\cos\frac{3\alpha+\beta}{2} \cdot \sin$$

ami a feladat állítását igazolja.

Hegedűs Viktor (Paks, Vak Bottyán Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzések. 1. Hegedűs Viktor megmutatta, hogy a feladat állítása megfordítható. Ezt az I. megoldás alapján könnyen beláthatjuk.

2. A $\gamma = 2\alpha + \beta$ összefüggésből $2\gamma = 4\alpha + 2\beta = \alpha + 180°$, amiből következik, hogy a háromszög tompaszögű.