I. megoldás. Szorozzuk meg 2-vel az egyenlőtlenséget és rendezzük a bal oldalra:

$$n+2\sum_{1\le i<j\le n}\cos(x_j-x_i)\ge 0.$$

Felhasználva a $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ és $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ azonosságokat, ez ekvivalens a következő állítással:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\cos^2 x_i+\sin^2 x_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}(\cos x_j\cos x_i+\sin x_j\sin x_i)\ge 0,$$

azaz

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\cos x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\right)^2\ge 0.$$

Ez az állítás pedig nyilvánvalóan igaz.

II. megoldás. A bizonyításhoz komplex számokat és a komplex exponenciális függvény tulajdonságait használjuk fel. Hogy ne használjuk két különböző célra az i betűt, a bizonyítandó állítást

$$n+2\sum_{1\le j<k\le n}\cos(x_k-x_j)\ge 0$$

alakra írjuk át, i-vel pedig a képzetes egységet jelöljük.

Ismeretes, hogy $e^{ia}=\cos a+i\sin a$. Ezt figyelembe véve

$$0\le\left|\sum_{j=1}^{n}e^{ix_j}\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}e^{ix_j}\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ix_k}\right)}=\left(\sum_{j=1}^{n}e^{ix_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}e^{-ix_k}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e^{i(x_j-x_k)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}e^{i(x_j-x_j)}+2\sum_{1\le j<k\le n}\left(e^{i(x_j-x_k)}+e^{i(x_k-x_j)}\right)=n+2\sum_{1\le j<k\le n}\cos(x_k-x_j).$$

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.)