Jelöljük a P pont vetületét az ABC alapsíkra P'-vel, az ABC háromszögben a C-ből induló magasság talppontját N-nel, az ABP háromszögben a P-ből induló magasság talppontját M-mel, a C-ből induló testmagasságnak az ABP síkkal való metszéspontját T-vel.

A tetraéder térfogata $V = \dfrac{a_t \cdot m}{3}$; tekintsük először alapnak az ABC háromszöget, az ehhez tartozó testmagasság PP'; másodszor legyen az alap az ABP háromszög, az ehhez tartozó testmagasság a CT. A térfogatok egyenlőségéből és abból, hogy $PP' < CT$, (a feltétel szerint) következik, hogy

$$V = \frac{t_{ABC} \cdot PP'}{3} = \frac{t_{ABP} \cdot CT}{3}, \quad \text{tehát} \quad t_{ABC} > t_{ABP}.$$

A két háromszögben az AB oldal közös, ezért $CN > PM$, vagyis a C pont messzebb van az AB szakasztól, mint a P pont.

Az AB egyenestől CN távolságra lévő pontok a síkban egy, az AB-től CM távolságra húzott párhuzamos egyenespáron vannak, P vetülete tehát ezen a sávon belül lesz. Hasonlóképpen kapunk egy sávot a BC, ill. AC egyenesek körül. A három sáv közös részébe, az $A_1B_1C_1$ háromszögbe (esetleg határára) esnek azok a pontok, amelyek eleget tesznek a feladat követelményének.

A szakaszok párhuzamosságából könnyen igazolható, hogy az A_1, B_1, C_1 metszéspontok létrejönnek és egy, az ABC-hez hasonló háromszöget alkotnak.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög tetszőleges P' belső-, (vagy határ-) pontjának az AB, BC, CA oldalaktól való távolságai rendre kisebbek a háromszög megfelelői magasságainál, hiszen P' benne van mindhárom sávban.

Fordítva, állítsunk P'-ben merőlegest az ABC síkra és vegyünk fel ezen egy P pontot úgy, hogy P-nek az AB, BC, CA egyenesektől való távolságai még mindig kisebbek legyenek az ABC háromszög megfelelő magasságainál.

Ha az ABP háromszögben $PM < CN$, akkor $t_{ABP} < t_{ABC}$, ami azt jelenti, hogy $PP' < CT$, ugyanígy bizonyítható, hogy PP' a tetraéder másik 2 magasságánál is kisebb, tehát valóban PP' a legkisebb a 4 testmagasság közül. A keresett mértani hely tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög belső és határon lévő pontjai.

Horváth Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o.t.)