Könnyen beláthatjuk, hogy a deltoid köré nem írható kör, azaz nem húrnégyszög. Ugyanis, ha húrnégyszög lenne, akkor a szimmetria miatt ez most azt jelentené, hogy a B és D csúcsánál derékszög van. Ez azonban nem igaz. Az AB egyenes iránytangense (könnyen leolvasható a koordinátáiból) 2, míg a BC egyenesé $-2/3$, azaz a két egyenes nem merőleges egymásra. Nincs tehát olyan kör, amely mind a 4 pontot a belsejében tartalmazza (vagy a 4 pont a körön kívül fekszik) és azoktól egyenlő távolságra van. Ha ugyanis ilyen kör létezne, akkor a középpontból kicsinyítve, (vagy nagyítva) a kör átmenne a deltoidnak mind a 4 csúcsán.

Így csak az lehetséges, hogy
(a) 3 pont az egyik (a körön belüli) és 1 pont a másik a (körön kívüli) síkrészben van,
vagy
(b) 2 pont a körön belül, 2 a körön kívül fekszik.

Az a) esetben is 3 lehetőségünk van,
1. ha az A pont van kívül,
2. ha a B pont van kívül (a szimmetria miatt ez ugyanaz, mintha D pont lenne kívül),
3. ha a C pont van kívül.

Az 1. esetben először írjuk fel a B, C, D pontokon átmenő kör egyenletét. A kör középpontjának koordinátái $O_1\left(\frac{11}{6};0\right)$ és sugara $r=\frac{13}{6}$. Látható, hogy az A pont a körön belül van, hiszen $O_1A=\frac{11}{6}<\frac{13}{6}$. Ezt a kört kell zsugorítani az O_1 pontból úgy, hogy egyenlő távolságra legyen mind a 4 ponttól. Ez akkor teljesül, ha

$$r_1=\frac{\frac{11}{6}+\frac{13}{6}}{2}=2$$

egységnek választjuk a kör sugarát.

A 2. és 3. esetben a számítás hasonlóan elvégezhető, itt csak az eredményeket közöljük.

A 2. esetben a kör O_2 középpontjának koordinátái $\left(2;-\frac{1}{4}\right)$, sugara $r_2=\frac{\sqrt{65}+\sqrt{97}}{8}\approx 2,23889$.

A 3. esetben $r_3=2$. (O_3 koordinátái $\left(\frac{5}{2};0\right)$)

b) Végül marad az a 2 eset, amikor a kör szétválasztja a pontokat.

Legyenek a szétválasztott pontok AB és CD. Írjuk fel mindkét szakasz felezőmerőlegesének egyenletét. Ezek metszéspontja egyenlő távolságra lesz A-tól és B-től, illetve C-től és D-től. Számítsuk ki ezeket a távolságokat.

Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái $\left(\frac{1}{2};1\right)$, az AB egyenes iránytangense 2, f_1 felező merőlegesének egyenlete $y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$; a CD szakasz felezőpontjának koordinátái $\left(\frac{5}{2};-1\right)$, a CD egyenes iránytangense $\frac{2}{3}$, f_2 felező merőlegesének egyenlete $y+1=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)$. f_1 és f_2 metszéspontjának koordinátái $O_4\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

$$\overline{O_4A}=\overline{O_4B}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2},\qquad O_4C=O_4D=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}.$$

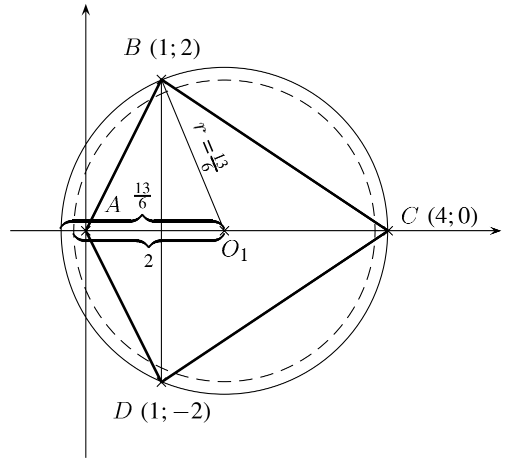
Ha tehát O_4 körül egy olyan kört rajzolunk, amelynek sugara $r_4=\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{26}}{2}}{2}\approx 2,065$, ez mind a 4 ponttól egyenlő távolságra lesz, mégpedig A, B a körön belül C, D a körön kívül. (a tengelyes szimmetria miatt az A, D és B, C szétválasztása ugyanezt az eredményt adja).

Végül legyen B, C és A, D a szétválasztott pontpár, és ugyanígy írjuk fel a szakaszfelező merőleges egyenesek metszéspontját. Az eredmény

$$O_5(2;0)\qquad \text{és}\qquad r_5=\frac{2+\sqrt{5}}{2}\approx 2,118.$$

Láthatjuk, hogy a legnagyobb sugár az $r_2=2,23889$; ezt akkor kaptuk, amikor a B pont a körön kívül, A, C, D pedig azon belül helyezkedett el.

Méder Áron (Budapest, Táncsics M. Gimn., II. o.t.)



B (1; 2)
r = 13/6
A
13/6
2
O1
C (4; 0)
D (1; −2)