Tudjuk, hogy az első n természetes szám összege $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. A feladat követelménye szerint azt a legkisebb n természetes számot keressük, amelyre

$$\frac{n(n+1)}{2} = k \cdot 10^4,$$

illetve átalakítva:

$$n(n+1) = k \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = k \cdot 2^5 \cdot 5^4 = k \cdot 32 \cdot 625,$$

alkalmas k természetes számmal.

n és $n+1$ két egymást követő egész szám, ezért nem lehet 1-nél nagyobb közös osztójuk. Így csak egyikük lehet páros; amelyik egyszersmind 32-vel is osztható kell, hogy legyen. Hasonlóképpen csak egyikük lehet osztható 5-tel; amelyik tehát 625-tel is osztható.

Elképzelhető, hogy ugyanaz osztható 32-vel is és 625-tel is, amiből $n = 32 \cdot 625 = 20000$, illetve $n+1 = 32 \cdot 625$, tehát $n = 19999$ adódik. Lehetséges azonban az, hogy n és $n+1$ egyike osztható 32-vel, másikuk 625-tel. Ez két esetet jelent, attól függően, hogy n vagy $n+1$ osztható 32-vel.

Legyen először $n = 32x$ és $n+1 = 625y$, alkalmas x és y egész számokkal. Eszerint $625y = 32x + 1$, vagy szokásos alakba írva:

$$625y - 32x = 1.$$

Ez egy úgynevezett *kétváltozós elsőfokú diofantoszi egyenlet.* Általános alakja $a \cdot x + b \cdot y = c$, ahol a, b, c adott egész számok; és attól lesz az egyenlet diofantoszi, hogy az (x, y) megoldásokat az egész számok körében keressük. Ismeretes, hogy az ilyen típusú egyenleteknek pontosan akkor van megoldásuk, ha a és b legnagyobb közös osztója osztja c-t is. Jelen esetben ez természetesen teljesül. Most az egyenlet megoldásának általános módszerét ebben a konkrét esetben végezzük el. Tekintjük az ismeretlenek együtthatói közül a kisebbiket, ez most 32, és megkeressük a 625-höz legközelebbi 32-vel osztható számot, ez 640. A kiinduló egyenletet $640y - 15y - 32x = 1$ alakba írva, kiemeljük a 32-t. $32(20y - x) - 15 = 1$, és bevezetjük az $u = 20y - x$ új ismeretlent, ahol u is egész; kapjuk, hogy

$$32u - 15y = 1. \tag{1}$$

Ez u-ra és x-re egy diofantoszi egyenlet. Az előzőhöz hasonló eljárással ezt $15(2u - y) + 2u = 1$ alakba írva azt kapjuk, hogy:

$$15v + 2u = 1, \qquad \text{ahol} \qquad v = 2u - y \text{ egész szám.} \tag{2}$$

Még egy lépést kell tennünk: az egyenletet $2(7v + u) + v = 1$ alakba írjuk, azaz:

$$2w + v = 1, \qquad \text{ahol} \qquad w = 7v + u \text{ egész szám.} \tag{3}$$

Most már v-t is ki tudjuk fejezni w-vel: $v = 1 - 2w$. Ezután rendre kifejezhetjük a (3), a (2) és az (1) alatti összefüggés felhasználásával u, y és x mindegyikét w-vel:

$$u = w - 7v = w - 7(1 - 2w) = 15w - 7, y = 2u - v = 2(15w - 7) - (1 - 2w) = 32w - 15, x = 20y - u = 20(32w - 15) - (15w - 7$$

Az eljárásból következik, hogy x és y csak ilyen alakú lehet, ahol w egész szám. Fordítva is igaz, ha w egész szám, akkor az x-re és y-ra kapott értékeket a kiindulási egyenletbe behelyettesítve, azt e számpár kielégíti. Mivel n pozitív, ezért x és y is pozitív, ami csak úgy lehet, ha w is pozitív. Emellett akkor kapjuk a legkisebb n értéket, ha x (és y) minimális. Ez akkor történik meg, ha $w = 1$, azaz $x = 332$ és $y = 17$. Ebből az $n = 332 \cdot 32 = 10624$ érték adódik. (Hasonlóan $n + 1 = 17 \cdot 625 = 10625$.)

Nem felejtkezhetünk meg a másik esetről, amikor $n = 625y$ és $n + 1 = 32x$. Ez a $625y - 32x = -1$ egyenlethez vezet. Itt elvégezve az eljárást az

$$y = 32w + 15 \qquad \text{és} \qquad x = 625w + 293$$

eredményhez jutunk. Most n – és így x valamint y – pozitivitásához elég az is, ha $w \geq 0$; és nyilván $w = 0$ adja a minimális lehetőséget. Azt kapjuk, hogy:

$$n = 625 \cdot y = 625 \cdot 15 = 9375;$$

ami valóban a megoldást szolgáltatja, hiszen $9375 < 10624 < 19999 < 20000$.

Megjegyzések. 1. Azok is megkapták a maximális 5 pontot, akik próbálgatással keresték meg az egyenlet megoldását, feltéve, ha az összes megfelelő értéket megtalálták.

2. Azok, akik azt állították, hogy n legkisebb értéke a 20000, dolgozataikra nem kaptak pontot.