

Mindkét oldal értékkészlete a nemnegatív számok halmaza, legkisebb értékük 0. Ezt a jobb oldal csak az $x = -\frac{1}{3}$ helyen veszi fel, a bal oldal pedig pontosan akkor, ha egyidejűleg

$$a = -x = \frac{1}{3}, \quad b = -2x = \frac{2}{3}, \quad \text{és} \quad c = -2x = \frac{2}{3}.$$

Az a, b, c számhármassnak ez az értékrendszere tehát szükséges feltétele annak, hogy az egyenlőség azonosság legyen.

A feltétel egyúttal elegendő is, ugyanis behelyettesítés és kiemelések után az egyenlőséget úgy alakíthatjuk, hogy

$$(1) \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 3^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2,$$

ez pedig minden x -re érvényes, akkor is, ha $x + \frac{1}{3} \neq 0$, mert $1 + 2^2 + 2^2 = 3^2$.

Megjegyzések. 1. A legtöbb beküldő felbontotta a zárójeleket, ezáltal hosszadalmas munka „szakadt a nyakába”. Egy részük szerencsére érdekes megállapításokhoz juthatott cserébe.

Aki így kezdett a feladathoz, a kívánt azonosság rendezése után a bal oldalon elsőfokú polinomhoz juthatott:

$$(2) \quad 2(a + 2b + 2c - 3)x + (a^2 + b^2 + c^2 - 1) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül minden x -re, ha a zárójelek értéke 0. Ebből egyenletrendszer adódik az a, b, c ismeretlenekre. Kevésnek ígérkezik, hogy három ismeretlenre csak két egyenletünk van, azonban ez az „előítéletünk” csak az *elsőfokú* egyenletrendszerekre vonatkozó ismereteinkből táplálkozik. Egyértelmű megoldást fogunk kapni, mégpedig ismét $c = b = \frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{3}$ lesz az egyetlen megoldás.

2. Többen egy harmadik egyenletet „teremtettek” maguknak a $b = c$ feltételezéssel, azzal az indoklással, hogy b és c szerepe „egyenrangú”. Szerencsére a kiszámított értékek is eleget tesznek ennek.

3. Elég sokan észrevették, hogy a (2)-beli együtthatók eltűnése a koordináta-geometriai „nyelvén” tetszetősen értelmezhető az a, b, c tengelyekkel kifeszített térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. A második zárójelbeli

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

követelmény az origó körüli egység sugarú gömb egyenlete, az elsőt pedig átrendezve

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3/2} + \frac{c}{3/2} = 1,$$

annak a síknak az egyenletét látjuk, amely a tengelyek pozitív felét az origótól rendre 3, 3/2, 3/2 egységnyi távolságban metszi. Ez a sík éppen érinti a gömböt az $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pontban.

4. A sikertelen dolgozatok beküldői közül sokan – indokolatlanul – csak az egész számok körében keresték a megoldást.

5. A fenti megfontolások természetesen csak akkor érvényesek, ha – szokás szerint – a valós számkörben maradunk. Érdekes figyelni azonban arra, mi történik, ha kilépünk a komplex számkörbe. A kapott

$$a + 2b + 2c = 3 \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

egyenletrendszerben tekintsük a -t paraméternek. Ekkor nem túl bonyolult átalakítással azt nyerjük, hogy

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = 2(1 - a^2) - \left(\frac{3 - a}{2}\right)^2 = -\left(\frac{3a - 1}{2}\right)^2.$$

Így a következő két, paraméteres megoldásrendszer adódik:

$$\left(a, \frac{3 - a}{4} + \frac{3a - 1}{4}i, \frac{3 - a}{4} - \frac{3a - 1}{4}i\right) \quad \left(a, \frac{3 - a}{4} - \frac{3a - 1}{4}i, \frac{3 - a}{4} + \frac{3a - 1}{4}i\right).$$

Ez olyan formájú, mint két egyenes paraméteres egyenlete a térben. Úgy is szoktuk ezt interpretálni, hogy a fent szereplő sík és gömb ebben a két (metsző) egyenesben metszi egymást. Ez nem valami érthetetlen dolog, hiszen egy sík egy forgáskúpot is metszhet metsző egyenespárban. Bizony, a komplex térben nincs sok különbség a kúp és a gömb között.

Nos, mint mondtuk, ez a két egyenes egy pontban metszi egymást (hiszen egy síkban vannak!); érdekes módon ez a metszéspont a valós térbe esik. Ez a pont a sík érintési pontja a gömbön.

Ha a sík metszi vagy „elkerüli” a gömböt, akkor más a helyzet. Nézzük például az $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ gömböt. Ezt az $a = 1$ összefüggéssel adott sík egy körben ($b^2 + c^2 = 1$) metszi. Noha ennek is vannak komplex pontjai, de ez mégis kör marad. Ha a síkot az $a = 2$ egyenlet definiálja, akkor a „metsző kör” egyenlete $b^2 + c^2 = -2$. Ez is kör, de ennek csak komplex pontjai vannak. Az, hogy eredeti példánkban a metszet egy egyenespár volt, annak tudható be, hogy az érintési viselkedés nem „reguláris” (rendes, szabályos), hanem „szinguláris” (szabálytalan, kivételes).