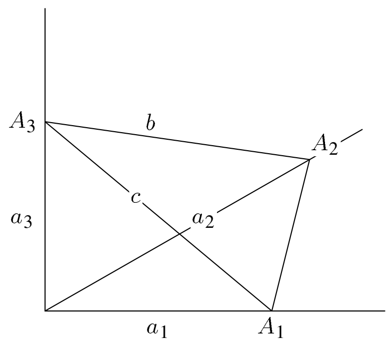
A metszet-háromszög mindegyik oldala egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói az a_1, a_2, a_3 távolságok közül valamelyik kettő; ezért Pitagorasz tételét felhasználva a háromszög a, b, c oldalai:

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\quad b=\sqrt{a_2^2+a_3^2},\quad c=\sqrt{a_3^2+a_1^2}. \tag{1}$$



A háromszög területét ki tudjuk számítani az oldalak ismeretében. A Heron-képlet szerint $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a kerület felét jelöli. Írjuk ezt be az összefüggésbe, innen azt kapjuk, hogy

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)+c]\,[(a+b)-c]\,[(a-b)+c]\,[c-(a-b)]}.$$

Az $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ azonosság többszöri felhasználása után kapjuk, hogy

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2-c^2+2ab)\,(c^2-a^2-b^2+2ab)}.$$

Írjuk be (1)-ből az a, b, c kifejezéseit; rendezés után

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{\left[2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)\,(a_2^2+a_3^2)}+2a_2^2\right]\left[2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)\,(a_2^2+a_3^2)}-2a_2^2\right]}==\frac{1}{4}\sqrt{4\,(a_1^2+a_2^2)\,(a_2^2+a_3^2)-4a_2^4}=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2}$$

ahol a további átalakítások során ismételten felhasználtuk az előző azonosságot.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Ált. Isk., 8. o.t.)