Először vizsgáljuk meg, mit mondhatunk a D pont helyzetéről. Tegyük fel, hogy a D pont a háromszög belsejében van, és legyen pl. A-tól 2, B-től 3, C-től 5 egységnyire. Mivel a háromszög szabályos, egyik csúcsának sincs kitüntetett szerepe. A D pont az *1. ábrán* a C körüli 5 egység, B körüli 3 egység, A körüli 2 egység sugarú körök közös pontja. Mivel $CD = 5$, D csak úgy lehet a háromszög belsejében, ha AC, azaz a háromszög oldala hosszabb 5 egységnél, de akkor az A és B körüli 2 és 3 egység sugarú köröknek nem lehet metszéspontjuk. D tehát nem lehet belső pont. Hasonlóan látható be, hogy D nem lehet az AC, BC oldalakon sem.

Ha D pl. az AB szakaszon lenne, akkor az A és B körüli körök metszéspontja lenne, ami azt jelentené, hogy $AB = 5$ egység, de akkor D nem lehetne C-től 5 egységnyire. D tehát csak a háromszögön kívül helyezkedhet el.

A feladat további részére három különböző megoldást mutatunk be.

I. megoldás. Helyezzük el a szabályos háromszöget egy derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy az A csúcsa az origóba, az AB oldalegyenese az x tengelyre essék. A háromszög oldalának hosszát jelölje a, ekkor a csúcsok koordinátái $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$. Legyenek a D pont koordinátái $(x;y)$, és $|\overrightarrow{DA}| = 2$, $|\overrightarrow{DB}| = 3$, $|\overrightarrow{DC}| = 5$, amelyeket koordinátákra felírva az

$$x^2 + y^2 = 4, (1) (x-a)^2 + y^2 = 9, (2) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 25. (3)$$

egyenletrendszert kapjuk.

Elvégezzük a négyzetreemeléseket és összevonásokat:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 9, (2') x^2 - ax + y^2 - \sqrt{3}ay + a^2 = 25. (3')$$

(1)-ből $x^2 + y^2 = 4$-et behelyettesítve $(2')$-be, majd a $(3')$-be:

$$x = \frac{a^2-5}{2a} \qquad \text{és} \qquad y = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - \left(\frac{a^2-5}{2a}\right)^2}.$$

x és y most kapott kifejezéseit $(3')$-be helyettesítve az alábbi negyedfokú egyenletet kapjuk a-ra:

$$4a^4 - 152a^2 + 1444 = 0,$$

ahonnan a háromszög oldala $a = \sqrt{19} \approx 4,359$ egység.

Bakonyi Zoltán (Bp., Veres Péter Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget és a rajta kívül fekvő D pontot, amelyre $AD = 2$, $BD = 3$, $CD = 5$.

Forgassuk el a CBD háromszöget a C pont körül $60°$-kal úgy, hogy B elforgatottja, B' az A pontba kerüljön, D képe D'. Így $CD = CD' = 5$, a DCD' háromszög egyenlő szárú, és mivel $DCD'\sphericalangle = 60°$, így $CD'D\sphericalangle = D'DC\sphericalangle$ is $60°$-osak. Tehát a DCD' háromszög egyenlő oldalú, $DD' = 5$. De $DA + AD' = 2 + 3 = 5$, vagyis D, A, D' egy egyenesbe esik, és $AD'C\sphericalangle = 60°$. Az $AD'C$ háromszög $AC = a$ oldalára írjuk fel a koszinusztételt:

$$a^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60°,$$

ahonnan $a = \sqrt{19}$, amint azt már az előbb is láttuk.

Fazekas Péter (Bp., Apáczai Cs. J. Gimn., III. o.t.)

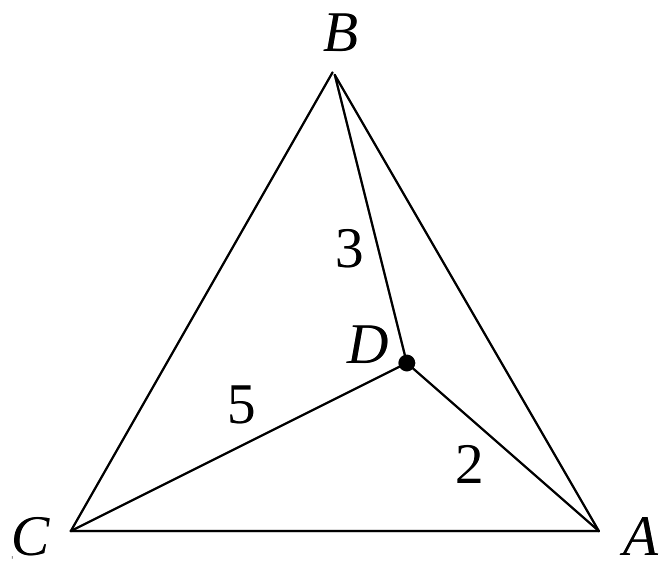
III. megoldás. A Ptolemaiosz-tétel azt mondja ki, hogy egy húrnégyszögben az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalpárok szorzatainak összegével. A tétel megfordítása is igaz, vagyis ha egy négyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalpárok szorzatainak összegével, akkor a négyszög húrnégyszög. (A tétel és bizonyítása megtalálható pl. H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer: *Az újra felfedezett matematika*, 74. old., Gondolat Kiadó, Budapest, 1977.)

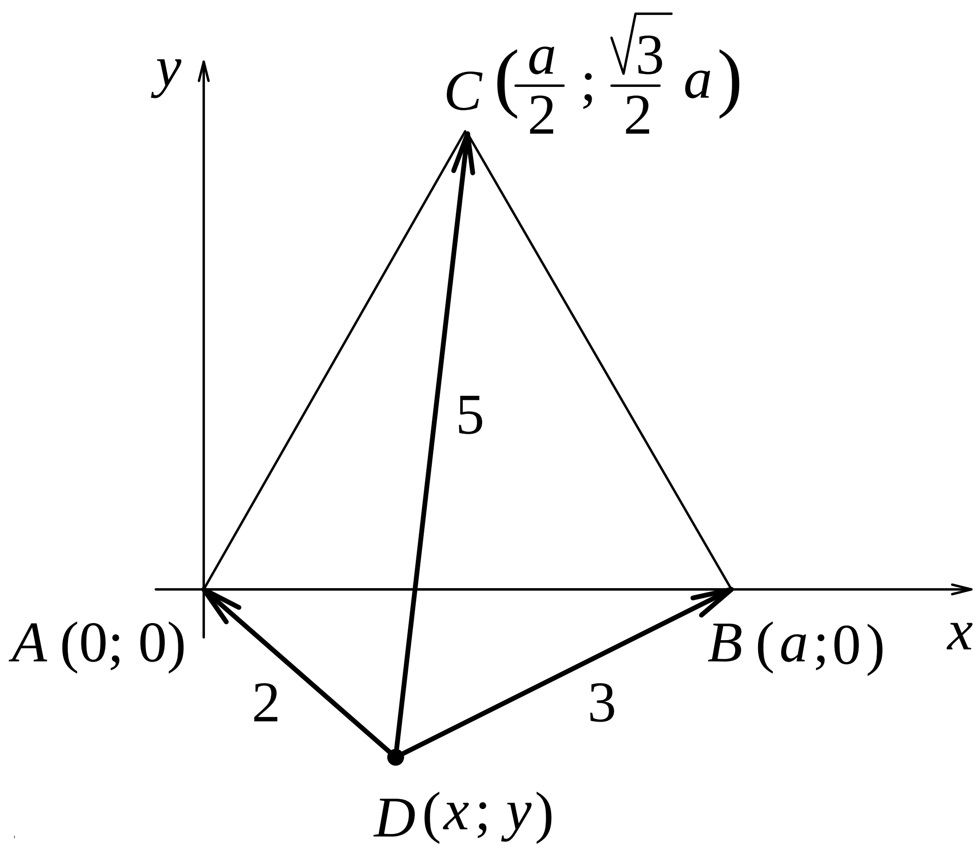
Esetünkben $5a = 2a + 3a$, vagyis $ADBC$ húrnégyszög, és mivel $ACB\sphericalangle = 60°$, $BDA\sphericalangle = 120°$. A BDA háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

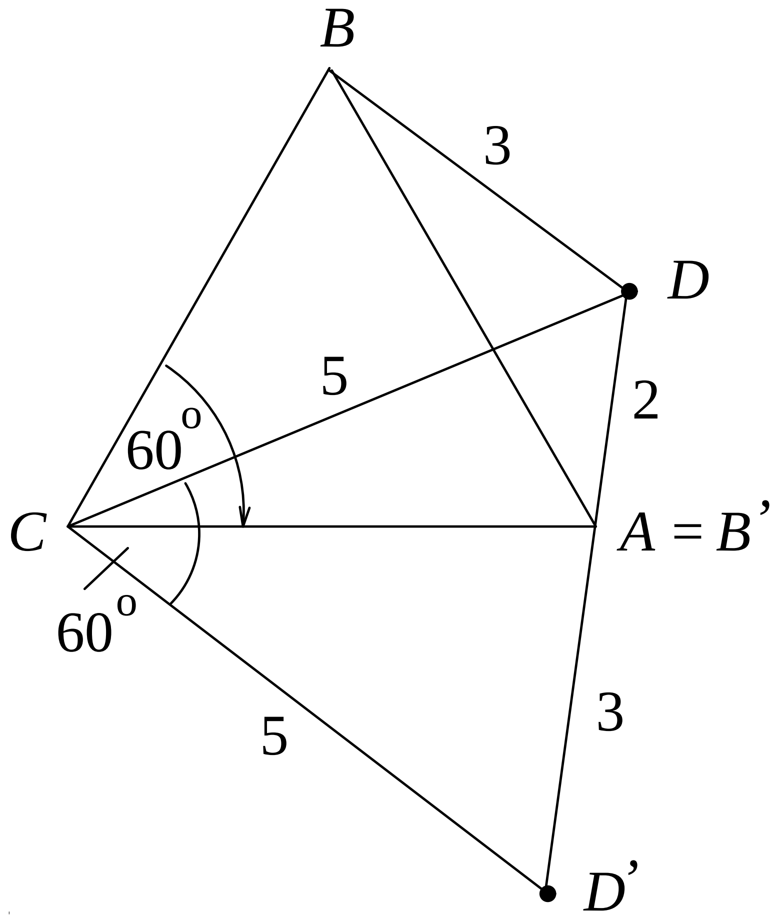
$$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 2^2 + 3^2 + 6 = 19,$$

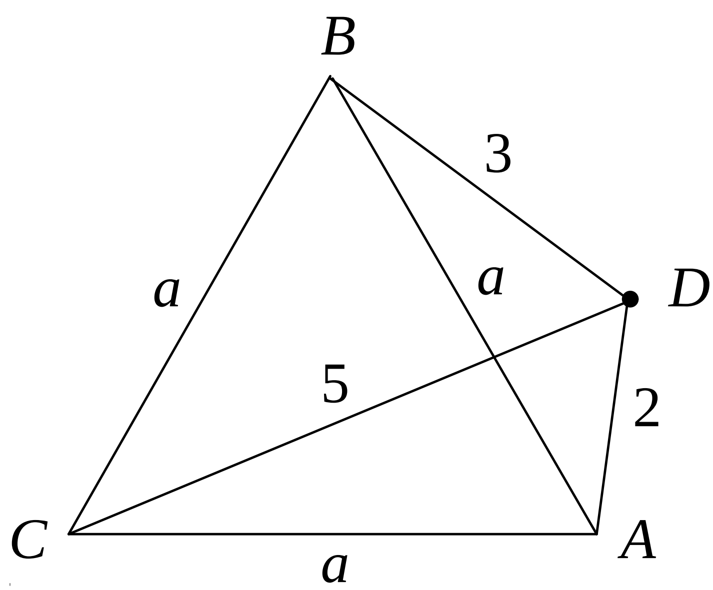
így $a = \sqrt{19}$.

Zaupper Bence (Győr, Krúdy Gy. Szki., III. o.t.)


B
3
D
5
2
C
A


y
$C\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$
5
$A(0;0)$
$B(a;0)$
x
2
3
$D(x;y)$


B
3
D
5
2
60°
C
A = B'
60°
3
5
D'


B
3
a
a
D
5
2
C
A
a