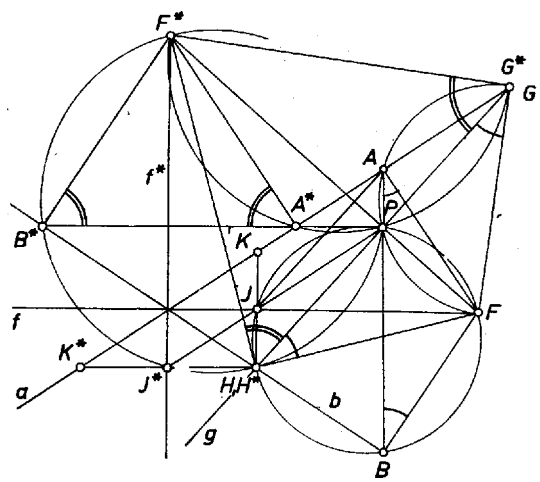
I. megoldás. Messe a kérdéses merőleges a-t G-ben, b-t H-ban, ekkor elég belátnunk az FGH és FHG szögek egyenlőségét, hiszen így FGH egyenlő szárú háromszög, és FP magassága felezi a GH alapot. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a és b közül a P-hez közelebbi legyen a.

Legyen először f az a és b közti négy szögtartomány közül annak a felezője, amelyikben P benne van, és messe az t-re merőleges PA egyenes b-t B-ben. P az AB szakaszon van, F ugyanebben a szögtartományban adódik, és G az FP egyenesnek azon a partján, amelyiken A van, B és H pedig a másik partján. $FPAG$ és $FPHB$ húrnégyszögek, mert az FG szakasz A-ból és P-ből, FH pedig P-ből és B-ből derékszögben látszik, hiszen B az A tükörképe f-re, és így FB merőleges b-re. Mivel még P a GH szakasz belső pontja, azért

$$FGH\sphericalangle = FGP\sphericalangle = FAP\sphericalangle = FBP\sphericalangle = FHP\sphericalangle = FHG\sphericalangle.$$

Ezt akartuk bizonyítani, ebből – mint láttuk – az állítás egyszerűen következik.



f-ként a P-t tartalmazó a, b szögtartománnyal szomszédos szögtartományok felezőjét véve – legyen ez $f*$, és az így szerkesztett pontok $A*$, $F*$, $G*$, $H*$ és $B*$, meggondolásunk csak abban változik, hogy $F * P$ szétválasztja az $A*$, $G*$ pontpárt és hogy $A*$ van a $PB*$ szakaszon. A megfelelő húrnégyszögekből ekkor is

$$F^*G^*H^*\sphericalangle = F^*G^*P\sphericalangle = 180^\circ - F^*A^*P\sphericalangle = F^*A^*B^*\sphericalangle = F^*B^*A^* =$$
$$F^*B^*P\sphericalangle = F^*H^*P\sphericalangle = F^*H^*G^*\sphericalangle.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az állítás fordítottját bizonyítjuk, megmutatjuk, hogy ha P felezi a g egyenesnek az a és b közé eső GH szakaszát, akkor FP merőleges g-re. Ebből az állítás akkor következik, ha azt is belátjuk, hogy P a rajta átmenő egyenesek közül csak egynek felezi az a és b közti szakaszát. Ez abból adódik, hogy pl. G-t b-nek P-re vett tükörképe metszi ki a-ból.

Messe a H-n átmenő, f-re merőleges egyenes f-et J-ben, a-t K-ban. H és K tükrös pár f-re, ezért J felezi HK-t, és mivel még $HK \parallel AP$, azért PAJ a KHG háromszög középháromszöge, $PJ \parallel a$ és $AJ \parallel g$. Így F a PAJ háromszög magasságpontja, hiszen itt metszi egymást a J-ből és A-ból kiinduló magasságvonal. Ezért PF merőleges AJ-re és a vele párhuzamos g-re is, amint állítottuk.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Bizonyításunk mindkét szögfelezőre egyformán érvényes.