**I. megoldás.** Olyan felbontást keresünk, melyben mindkét tényező-polinom másodfokú és $x^2$ együtthatója mindkettőben 1. Feladatunk a további $p$, $q$, illetőleg $r$, $s$ együtthatók meghatározása úgy, hogy

$$(x^2+px+q)\cdot(x^2+rx+s)=x^4+(p+r)x^3+(q+pr+s)x^2+(qr+ps)x+qs=$$
$$=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

azonosság legyen. Ez teljesül, ha $x^3$, $x^2$, $x$ együtthatója és az $x$-et nem tartalmazó tag a két oldalon rendre egyenlő, azaz, ha

$$(1)\qquad p+r=1,\qquad (2)\qquad q+pr+s=1,$$
$$(3)\qquad qr+ps=1,\qquad (4)\qquad qs=1.$$

(3)-at $q$-val megszorozva, (1) és (4) felhasználásával kiküszöbölhetjük $r$-et és $s$-et. (1)-ből $r=1-p$, így

$$q^2r+qps=q^2(1-p)+p=q,$$
$$(5)\qquad q^2-q-p(q^2-1)=(q-1)(q-pq-p)=0.$$

Ez mindenesetre teljesül, ha $q=1$, amikor (4)-ből $s=1$, (2)-ből $pr=-1$, és (1)-et is tekintetbe véve $p$ és $r$ a

$$(6)\qquad (z-p)(z-r)=z^2-(p+r)z+pr=z^2-z-1=0$$

egyenlet gyökei, tehát az $(1+\sqrt{5})/2$ és $(1-\sqrt{5})/2$ értékek. Ezekkel fennáll a

$$P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)$$

azonosság. Ezzel megkaptunk egy kívánt alakú felbontást.

*Megjegyzések.* 1. Egy első és egy harmadfokú, valós együtthatós tényezőre való felbontás nem létezik, mert különben volna $P(x)$-nek valós 0-helye, de az a talált felbontás valamelyik tényezőjének is 0-helye volna. Ámde mindkét tényező diszkriminánsa negatív, s így egyiknek sincs valós 0-helye.

2. Világos, hogy $q=1$ választás mellett a föntin kívül csak olyan, két másodfokú valós együtthatós tényezőből álló felbontás nyerhető, amelyik abból az egyik tényezőnek egy 0-tól különböző $c$ számmal, a másiknak $1/c$-vel való szorzásával keletkezik. Ha viszont a $q-pq-p=0$ egyenletből indulunk ki, akkor (2)-ből pl. $p$-re negyedfokú egyenletet nyerünk, ami teljes négyzetté kiegészítésén keresztül másodfokú tényezőkre bontható, de azok egyikének sincs valós 0-helye. Így nincs a fentitől lényegesen különböző, valós együtthatós felbontás másodfokú tényezőkre sem.

**II. megoldás.** A polinomot $x^2+1$ hatványai szerint rendezhetjük:

$$P(x)=x^4+1+x(x^2+1)+x^2=(x^2+1)^2+x(x^2+1)-x^2.$$

Egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté, így két négyzet különbsége keletkezik, amit már szorzattá alakíthatunk:

$$P(x)=\left(x^2+1+\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{5}{4}x^2=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\cdot\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right).$$

*Megjegyzések.* 1. Az eljárás általában alkalmazható $x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ alakú, ún. szimmetrikus polinomokra, és nem különbözik lényegesen attól a szokásos eljárástól, amely szerint a polinom $1/x^2$-szeresét az $y=x+\dfrac{1}{x}$ új változóval fejezzük ki.

Az itt vázolt úton mindig eljutunk két, valós együtthatós másodfokú tényezőre bontáshoz, ha $a^2-4b+8\geqq 0$.

2. Az I. megoldás gondolatmenete is alkalmazható az említett általánosabb esetben, és célra vezet, bármilyen értékek is az együtthatók.