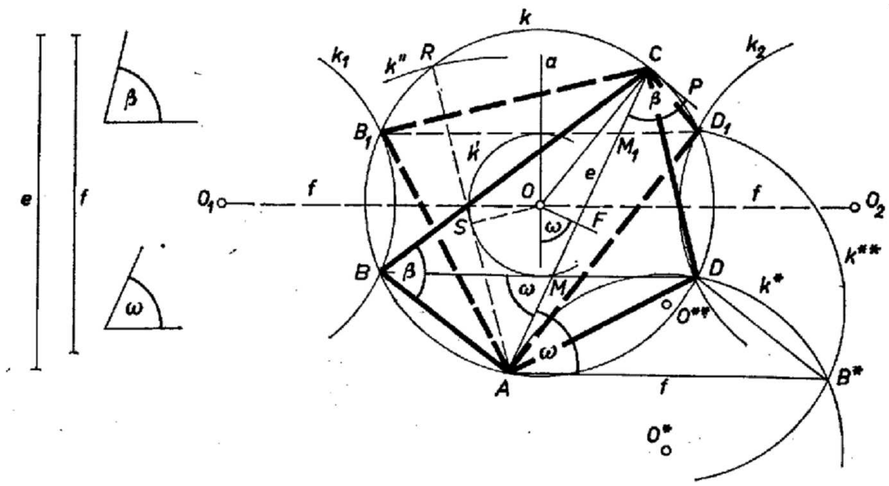
I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeket kielégítő négyszög, $AC = e \geqq f = BD$ az adott hosszúságú átlók, metszéspontjuk M, $ABC\sphericalangle = \beta$, és $AMB\sphericalangle = \omega$ az adott szögek. A betűzés alkalmas választásával feltehetjük, hogy $\omega \leqq 90°$.



2. ábra

Az adatokból megszerkeszthető a négyszög köré írható k kör, mint olyan kör, amelyiknek egyik ívéről az e szakasz β szögben látszik. Ezután f hosszúságú húrt kell elhelyeznünk úgy, hogy az az e hosszúságú húrt ω szögben messe.

A k kör f hosszúságú húrjai felezőpontjukban érintenek egy k-val koncentrikus k' kört. Ehhez kell AC-vel ω szöget bezáró érintőt szerkeszteni.

Ezek alapján a szerkesztés pl. a következő módon végezhető: $AC = e$ hosszúságú szakaszt rajzolunk, és erre $ACP\sphericalangle = \beta$ szöget szerkesztünk; a CP-re C-ben szerkesztett merőlegesnek és az AC-re F felezőpontjában állított merőlegesnek O metszéspontja körül C-n át szerkesztett k kör a négyszög köré írt kör. Ezt pl. A-ból f sugarú körrel egyik irányban elmetsszük az R pontban.

Az AR-re O-bó1 bocsátott merőleges S talppontján át O körül húzott kör k'. Szerkesszük meg O-n át azt az a egyenest, amelyik AC felező merőlegesének AC felé haladó félegyenesével az egyenes A-t tartalmazó partján ω szöget zár be. Ennek k'-vel való metszéspontjaiban k'-höz húzott érintők (a-ra állított merőlegesek) k-ba eső húrjai f hosszúságúak és egyenesük AC-vel ω szöget zár be, mert e hajlásszög szárai a-ra, ill. OF-re merőlegesek.

Ahhoz, hogy az A és C pont és a most szerkesztett valamelyik húr végpontjai meghatározta négyszögben az e és f hosszúságú húr átló legyen, kell, hogy a kettő messe egymást. Ha ez teljesül, akkor jelöljük D-vel az f hosszúságú húrnak azt a végpontját, amelyik az AC egyenesnek ugyanazon a partján van, mint P, a másik végpontot B-vel. Így a kerületi szögek egyenlősége folytán $ABC\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \beta$, ugyanis CP a k kör érintője, mert szerkesztés szerint merőleges az OC sugárra. Ezek szerint az $ABCD$ négyszög megfelel a feladat követelményeinek.

Mindig megszerkeszthető a k kör és $e \geqq f$ folytán az AR húr, a k' kör, az a egyenes és erre a k'-vel való metszéspontjaiban állított merőlegesek. A feladatnak nincs megoldása, 1 vagy 2 megoldása van aszerint, hogy az a-ra állított merőlegesek k-ba eső szakaszai nem metszik AC-t, ill. csak az egyikük, vagy mind a kettő metszi.

Megjegyzés. A k kör f hosszúságú, kívánt állású húrjainak végpontjait kimetszhetjük azokkal a k_1, k_2 körökkel is, amelyek k-nak f nagyságú eltolásával adódnak az e-vel ω szöget bezáró (és egymással ellentétes) irányban. $f \leqq e$ miatt közös pont mindig van, és a húr megfelel, ha végpontjai AC két oldalán adódnak.

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk. Tükrözzük az AD oldal E felezőpontjára[1] B-t, O-t és k-t, legyen a kép B^*, 0^*, k^*. Ekkor egyrészt $ABDB^*$ paralelogramma, $AB^* \# BD$, és $B^*AM\sphericalangle = BMA\sphericalangle = \omega$, váltószögek, mert E, és így B^* is AC-nek B-t nem tartalmazó partján van, M pedig az AC szakaszon. Másrészt D a k és k^* metszéspontja. Így a következő szerkesztéshez jutottunk.

AC-nek, O-nak és k-nak a fentiek szerinti megszerkesztése után felmérjük a $CAB^*\sphericalangle = \omega$ szöget, és új szárára az $AB^* = f$ szakaszt. AB^* mint húr fölé OC sugarú k^* kört szerkesztünk, ennek k-val való metszéspontja D, végül B^* tükörképe AD felezőpontjára nézve B.

A kapott $ABCD$ négyszögben $AC = e$, $BD = AB^* = f$ és $BMA\sphericalangle = MAB^*\sphericalangle = \omega$, továbbá k átmegy B-n, mert k és k^*, mint egyenlő sugarú körök, egymás tükörképei a közös AD húrjuk felezőpontjára nézve, tehát a feltétel alapján $ABC\sphericalangle = \beta$.

B^* egyértelműen szerkeszthető és D létrejön, mert k-nak és k^*-nak van közös pontja: A.

k^* helyett AB^*-ra való k^{**} tükörképét használva újabb megoldást kapunk. A megoldások megfelelnek, ha D az AC egyenes B^*-ot tartalmazó partján adódik, számuk legfeljebb 2.

[1] Az ábrán E pótlandó.