Tüntessük fel az összeg jele mellett indexben tagjainak számát, így a fenti kifejezés $S_n \cdot n = 2$ és 3 esetén az összeg így alakítható:

$$S_2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k(1 + k + 1) =$$
$$\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)(k+2)}{k+1},$$
$$S_3 = S_2 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) =$$
$$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2) \cdot \left(\frac{2}{k+1} + 1\right) = \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{k+1}$$

Az utolsó alak számlálója mindkét esetben $k+1$ egymás utáni természetes szám szorzata, első tényezőnek véve az összeg tagjainak számát, a nevező pedig $k+1$. Ebből azt sejtjük, hogy

(1)
$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{k+1}.$$

(Könnyű látni, hogy ez $n = 1$ esetén is érvényes.) Ezt fogjuk bizonyítani a teljes indukció módszerével.

Tegyük fel, hogy (1) helyes, n-nek valamilyen i értékére. Ekkor öröklődik $n = i + 1$-re is, mert

$$S_{i+1} = S_i + (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) =$$
$$\frac{i \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot (i+k)}{k+1} + (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) =$$
$$(i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) \left(\frac{i}{k+1} + 1\right) =$$
$$\frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k)(i+k+1)}{k+1},$$

tehát (1) helyes minden pozitív egész n-re. Másrészt (1)-mint egytagú kifejezés - egyszerűbbnek tekinthető az eredeti, adott alaknál. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A speciális osztályok matematikai gyakorlatainak anyagában szerepelnek a kombinatorika elemi fogalmai és feladatai. Ezek felhasználásával eredményünket az alábbiak szerint értelmezhetjük.[1]

A talált

egyenlőséget $k!$-sal osztva a bal oldal tagjaiban felismerjük azoknak a k-ad osztályú kombinációknak a számát, amelyeket rendre k, $k+1$, $\ldots$, $n+k-1$ (különböző) elemből lehet képezni, a jobb oldalon pedig $n+k$ elem $k+1$-ed osztályú kombinációinak számát. Azt kaptuk tehát, hogy

$$C_k^{(k)} + C_{k+1}^{(k)} + \ldots + C_{n+k+1}^{(k)} = C_{n+k}^{k+1},$$

illetőleg a másik szokásos jelöléssel

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

Gondoljunk konkrétan az 1, 2, $\ldots$, $n+k$ *számok*ból képezhető $k+1$-ed osztályú kombinációkra. Igy a bal oldal a kombinációk számát legkisebb számuk szerint csoportokba foglalva adja meg. Az egymás utáni tagok azoknak a kombinációknak a számát adják, amelyeknek legkisebb száma rendre

$$n, \qquad n-1, \qquad \ldots, \qquad 1$$

ekkor ugyanis a további k számot a nagyobbakból választjuk minden lehetőség szerint, azok száma pedig rendre

$$k, \qquad k+1, \qquad \ldots \qquad n+k-1.$$

$n+1$-et már nem választhatjuk a $k+1$-ed osztályú kombináció legkisebb számának.

Hasonlóan mondhatjuk, hogy a bal oldal egymás utáni tagjai azoknak a kombinációknak a számát jelentik, amelyek legnagyobb száma rendre

$$k+1, \qquad k+2, \qquad \ldots \qquad k+n.$$

[1] Az általános tantervű osztályok tanulói részére ajánljuk: Kürschák J.–Hajós Gy. –Neukomm Gy.–Surányi J.: Matematikai versenytételek I., 3. kiadás, Tankönyv-kiadó, Budapest, 1965, 26. o.