I. megoldás. Az első fél óra után a vonatnak akkora útja van még hátra B-ig, amennyit a csille megtett ez alatt az idő alatt, együttesen tehát annyi utat tettek meg, mint az AB távolság. A harmadik adat szerinti találkozásig viszont a két jármű együtt oda-vissza bejárta az AB távolságot. Ehhez kétszer annyi idő kellett, tehát a találkozás 1 órával az indulás után történt. A második szimmetrikus helyzet 1/4 órával ezelőtt, vagyis 3/4 órával az indulás után következett be. A csille tehát a mondott 2 km-nyi utat az óra harmadik negyedórája alatt tette meg, így sebessége 8 km óránként.

Eszerint a csille az első szimmetrikus helyzetben 4 km-re, a másikban 6 km-re volt A-tól. Ugyanennyire volt a vonat e két időpontban B-től, és mivel közben B-ig ment, és onnan visszafordult, a harmadik negyedóra alatt 10 km-t tett meg, sebessége 40 km óránként.

Végül A és B távolsága, mint a járművek fél órai útjának összege, 24 km.

*

A versenyzők túlnyomórészt egyenletrendszer felállításával dolgoztak:

II. megoldás. A vonat és a csille sebességét (km/óra egységben) v_1, ill. v_2-vel, az AB távolságot (km-ben) s-sel, a csillének 2 km megtételéhez szükséges idejét (órában) t-vel jelölve a feltételek így írhatók fel:

$$v_2 \cdot \frac{1}{2} = s - v_1 \cdot \frac{1}{2}, \qquad v_2 t = 2,$$
$$v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) - s, \qquad (v_1 + v_2)\left(\frac{3}{4} + t\right) = 2s.$$

Az első egyenletet átrendezve

$$v_1 + v_2 = 2s.$$

Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve és a 0-tól különböző $2s$-sel egyszerűsítve, majd a 2. egyenletet felhasználva

$$\frac{3}{4} + t = 1, \quad t = \frac{1}{4}, \quad v_2 = \frac{2}{t} = 8.$$

Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve és átrendezve

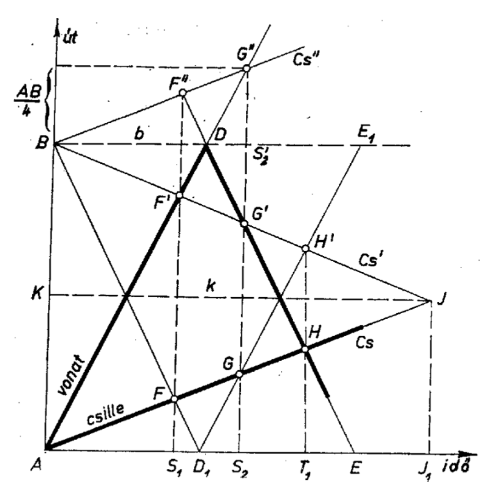
$$\frac{3}{4}(v_1 - 8) = s, \qquad v_1 + 8 = 2s,$$

és v_1-et a második egyenletből az elsőbe helyettesítve

$$\frac{3}{4}(2s - 16) = s, \qquad \text{amiből} \qquad s = 24 \text{ és } v_1 = 40.$$

Megjegyzés. A gondolatmenet v_2 meghatározásáig láthatóan megegyezik az I. megoldásával.

III. megoldás. Mérjük fel egy derékszögű koordinátarendszer tengelyeire a vonat útját (A-tól mérve) és az időt (a közös indulástól számítva, 1. ábra). A vonat mozgását ekkor egy B magasságig egyenesen emelkedő, onnan ugyanolyan szögben süllyedő ADE törött vonal ábrázolja, a DE egyenes az AD egyenes tükörképe az idő-tengellyel B-n át húzott b párhuzamosra. Ezzel lényegében megválasztottuk az idő-tengely és az út-tengely egységeinek arányát, ezért a csille mozgásának grafikonjaként csak egyetlen ACs félegyenes felel meg. Éppen ennek megszerkesztését tekintjük feladatunknak, és kérdéseinkre a választ a helyes grafikonpárból fogjuk kiolvasni.



1. ábra

A járműveknek a pályán mutatkozó szimmetrikus helyzetei a grafikonokban is megmutatkoznak, a grafikonok megfelelő pontjai egymás tükörképei arra a k egyenesre nézve, amely átmegy az AB szakasz K középpontján és párhuzamos az idő-tengellyel. Ezeket a vonat grafikonjából kimetszi ACs-nek k-ra vonatkozó BCs' tükörképe, legyenek ezek rendre F', G', ekkor k-ra való F, G tükörképük ACs-nek ugyanazon abszcisszájú pontja. Másrészt a találkozásnak ACs és a DE grafikonszakasz közös H pontja felel meg.

Legyen F, G, H vetülete az idő-tengelyen rendre S_1, S_2, T_1, így az első szimmetrikus helyzetig eltelt fél órának az idő-tengely AS_1 szakasza felel meg, a második szimmetrikus helyzettől a találkozásig eltelt negyedórának az S_2T_1 szakasz. Mármost AS_1, S_2T_1 egyenlő az ABF, illetőleg $G'GH$ háromszögnek az út-tengelyre merőleges magasságával, e két háromszög pedig hasonló, mert az AB, $G'G$ oldalukon levő szögek a végzett tükrözések miatt páronként egyenlők. Eszerint

$$G'G : AB = S_2T_1 : AS_1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2},$$

tehát $G'G = AB/2$, továbbá $G'S_2 = S_2G = AB/4$, ahol S_2 a G' vetülete b-n.

G'-nek b-re vett G'' tükörképe az AD egyenesen van, és itt átmegy BCs'-nek b-re vett BCs'' tükörképe is. Másrészt a kétszeri tükrözés miatt BCs'' előáll ACs-nek azzal az eltolásával is, amely A-t B-be viszi. Ezért $GG'' = AB$, és $S_2G'' = 5AB/4 = 5S_2G$, ami meghatározza az AD egyenesen G''-t és vele BCs''-t, tehát ACs-t is. Ezek szerint a vonat sebessége 5-ször akkora, mint a csilléé.

Másrészt F'-nek b-re vett tükörképe a DE

és BCs'' egyenesek metszéspontja, így $FF'' = AB = 2GG'$, és az $FF''H$, $GG'H$ háromszögek hasonló volta miatt $S_1T_1 = 2 \cdot S_2T_1$ és $S_1S_2 = S_2T_1$, a csillének a két szimmetrikus helyzet közti 2 km-es útszakasz megtételéhez ugyancsak 1/4 órára volt szüksége. Eszerint a csille sebessége 8 km/, a vonaté 40 km/. Továbbá AT_1 megfelel 1 órának, eddig a vonat és a csille együttes útja 48 km, az AB szakasz kétszerese, tehát $AB = 24$ km.

Megjegyzés. Az 1. ábrán a vonat–csille grafikon-pár meghatározásának az a változata is látható, amelyben az F, G találkozási pontokat ACs-ből ADE-nek BD_1E_1 tükörképével metsszük ki (vagyis mintha B-ből is indítanánk vonatot A felé). Ekkor $BD_1 \parallel DE$, $D_1E = BD = AD_1$, $AE = 2AD_1$, és $AFD_1\triangle \sim AHE\triangle$ miatt $AH = 2AF$, $AS_1 = AT_1/2$. Másrészt $AS_1 = 2S_2T$ és $BFF'\triangle \sim G'HH'\triangle$ miatt $FF' = 2HH'$ és ACs-nek k-n levő pontját J-vel jelölve $FF'J\triangle \sim HH'J\triangle$ így $S_1J_1 = 2T_1J_1 = S_1T_1 + T_1J_1$, amit a fentebbivel egybevetve $AS_1 = S_1T_1 = T_1J_1 = AJ_1/3$, és $AF = FH = HJ$. Ebből a tetszés szerint rajzolt ACs egyenesen kijelölhető F, és J helyzete, ami $AB = 2AK$ alapján meghatározza BF-et és tükrözéssel AD-t.