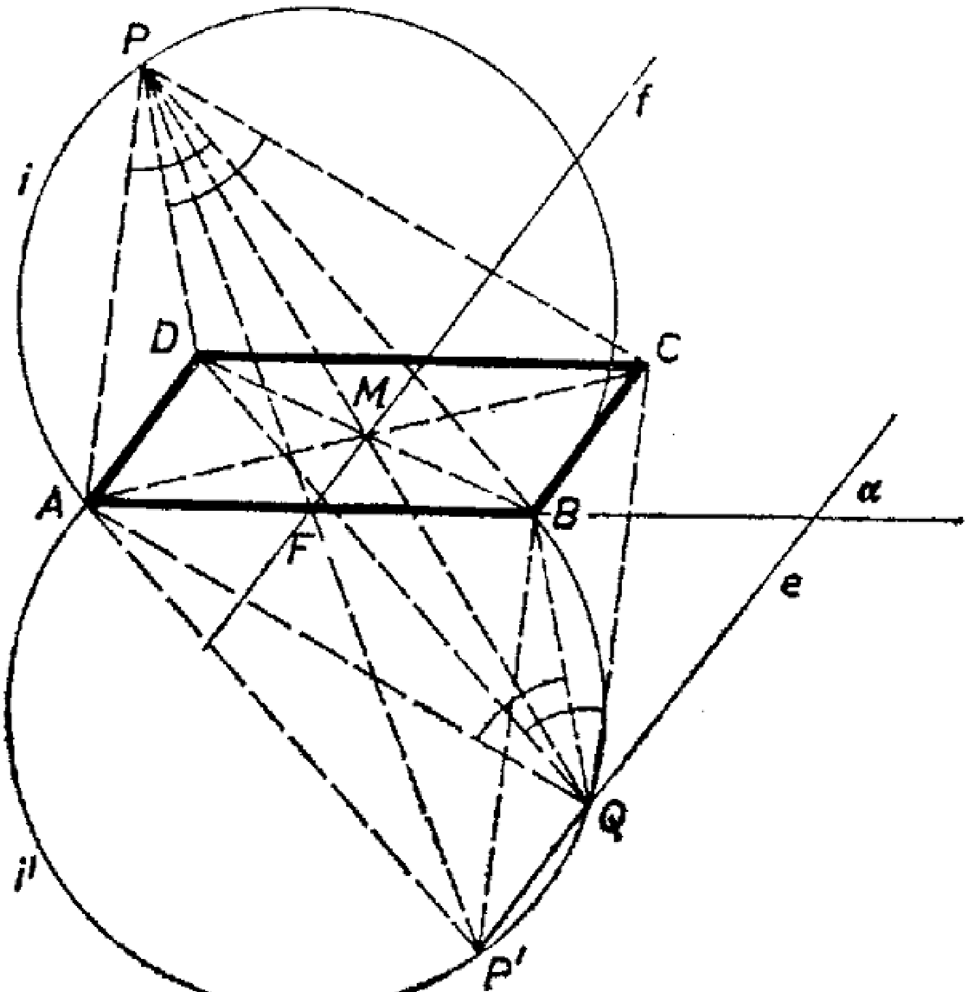
**I. megoldás.** Legyenek a keresett $ABCD$ paralelogramma adott csúcsai $A$ és $B$. Mivel a paralelogramma egy szöge a többit meghatározza, ezért feltehetjük, hagy az adott szög a $DAB\sphericalangle = \alpha$. Végül jelöljük a sík adott pontját – amelyből az $AB$ és $CD$ szakasz egyenlő szög alatt látszik – $P$-vel.




*1. ábra*

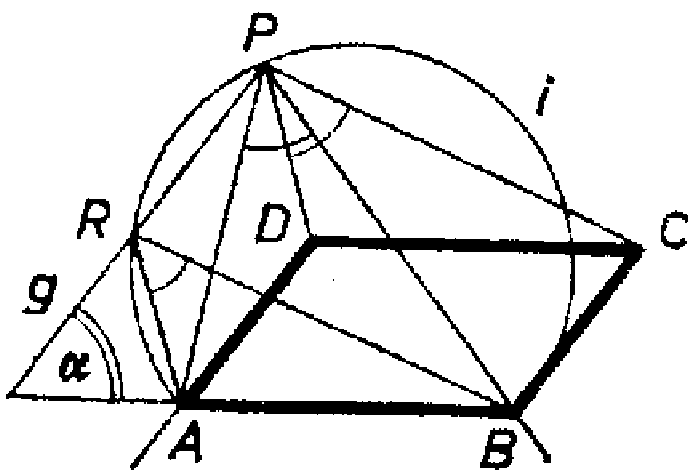
Ha meg tudjuk szerkeszteni a paralelogramma átlóinak $M$ metszéspontját, ezzel a feladatot megoldottuk, mert $C$ az $A$-nak és $D$ a $B$-nek $M$-re vonatkozó tükörképe (1. ábra). Mivel a paralelogramma $M$-re szimmetrikus, azért $P$-nek $M$-re vonatkozó $Q$ tükörképéből is ugyanakkora szög alatt látszik mind az $AB$, mind a $CD$ szakasz, mint $P$-ből. A tükrözésből következik, hogy $M$, a $PQ$ szakasz felezőpontja, ezért elegendő a $Q$ pont megszerkesztése. $Q$ rajta van az $AB$ szakasz fölé rajzolt azon két látókörív valamelyikén, amelyek pontjaiból az $AB$ szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint $P$-ből, hiszen $Q$-ból és $P$-ből az $AB$ szakasz egyenlő szögben látszik.

Másrészt $M$-en átmennek a paralelogramma középvonalai. Az $AD$ oldallal párhuzamos $f$ középvonalát azonnal meghúzhatjuk, ez átmegy az $AB$ szakasz $F$ felezőpontján és $\alpha$ szöget zár be az $AB$ egyenessel. Mivel a $PQ$ szakasz felezőpontja rajta van $f$-en, azért $Q$-nak rajta kell lennie azon az $f$-fel párhuzamos $e$ egyenesen, amely a $P$-nek az $f$ pontjaira vonatkozó tükörképeiből áll. Így $Q$, mint a fenti két látókörív és az $e$ egyenes közös pontja, megszerkeszthető.

A szerkesztés a következő: vesszük az $ABP$ háromszög körülírt körének $P$-t tartalmazó $AB = i$ ívét; ez nyilvánvalóan a szóban forgó látókörívek egyike, a másika pedig ennek $i'$ tükörképe $F$-re. Kimetsszük $i'$-n $P$-nek $F$-re vonatkozó $P'$ tükörképét. $P'$-n és $F$-en át megszerkesztjük az $AB$-vel $\alpha$ szöget bezáró $e$, illetőleg $f$ egyenest. Az $e$ és az $i$, $i'$ pár valamelyik (de $P'$-től különböző) $Q$ közös pontját $P$-vel összekötő egyenes $f$-ből kimetszi $M$-et, végül $A$ és $B$ tükörképe $M$-re $C$, ill. $D$.

Az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert az utolsó két tükrözés miatt paralelogramma, oldalai párhuzamosak $FM$-mel, tehát $DAB\sphericalangle = \alpha$, végül $CPD\sphericalangle = AQB\sphericalangle = APB\sphericalangle$, mert $Q$ a $P$ tükörképe $M$-re. A feladat diszkusszióját a III. megoldás után tárgyaljuk.

*Megjegyzés.* $f$ és $M$ megszerkesztése el is maradhat. $D$ paralelogrammává egészíti ki a $PBQ$ háromszöget, $C$ pedig a $BAD$ háromszöget. – Így természetesen a bizonyítás is módosul: $P'$ szerkesztése szerint $PAP'B$ paralelogramma, $D$ (új) szerkesztése szerint $PBQD$ szintén, így az $APD$ és $P'BQ$ háromszögben az $AP$ és $P'B$ továbbá $PD$ és $BQ$ oldalak egy irányban párhuzamosak és egyenlőek, tehát az $AD$ és $P'Q$ oldalak is, vagyis $DA\|e$, $DAB\sphericalangle = \alpha$.

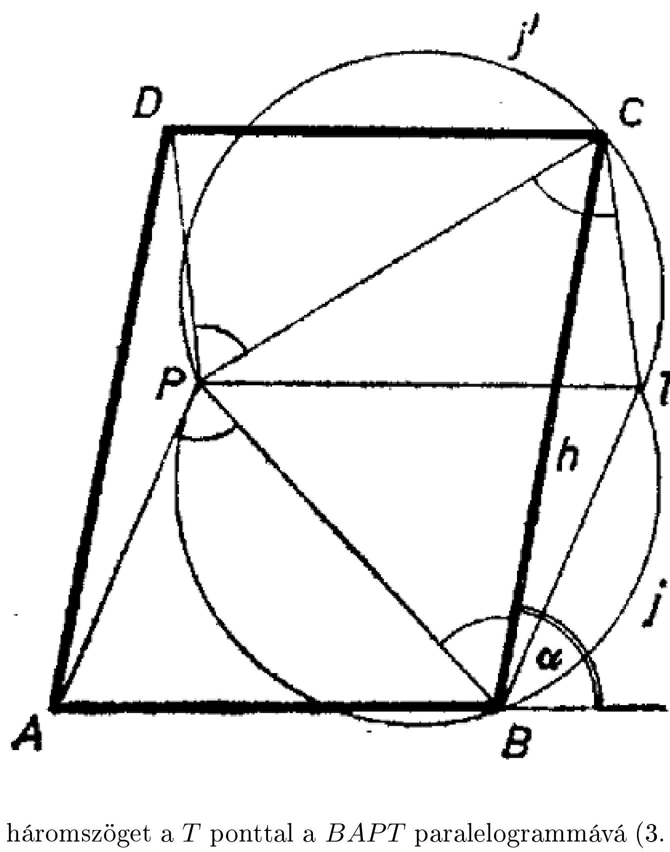



*2. ábra*

**II. megoldás.** Toljuk el a $PCD$ háromszöget úgy, hogy $D$ csúcsa $A$-ba kerüljön (2. ábra). Ezáltal $C$ a $B$-be kerül, $P$ pedig egy olyan $R$ pontba, melyből az $AB$ szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint $P$-ből $CD$, vagyis mint $P$-ből $AB$. $R$ tehát rajta van az előbbi két látókörív valamelyikén.

Másrészt az eltolás közben $P$ az $AD$-vel párhuzamosan mozgott, így $R$ rajta van a $P$-n átmenő és az $AB$ egyenessel $\alpha$ szöget bezáró $g$ egyenesen. Ezek alapján $R$, mint $g$ és a két látókörív közös pontja, megszerkeszthető, $D$ pedig paralelogrammává egészíti ki az $ARP$ háromszöget.

**III. megoldás.** Mindkét fenti megoldásban első lépésként két körív és egy egyenes metszéspontját kerestük meg, ebből kaptuk meg a paralelogramma csúcsait. Az I. megoldásban a metszéspontból előbb a paralelogramma középpontját határoztuk meg, a II. megoldásban a metszéspontból már közvetlenül kaptuk az egyik csúcsot. Most olyan megoldást adunk, melyben a körívek és egy egyenes metszéspontja mindjárt maga az egyik csúcs.




*3. ábra*

Egészítsük ki a $BAP$ háromszöget a $T$ ponttal a $BAPT$ paralelogrammává (3. ábra). Ekkor a $CDPT$ négyszög is paralelogramma, $PA$ és $TB$, valamint $PD$ és $TC$ is párhuzamosak, ezért és a feltevés miatt

$$PCT\sphericalangle = CPD\sphericalangle = BPA\sphericalangle = PBT\sphericalangle,$$

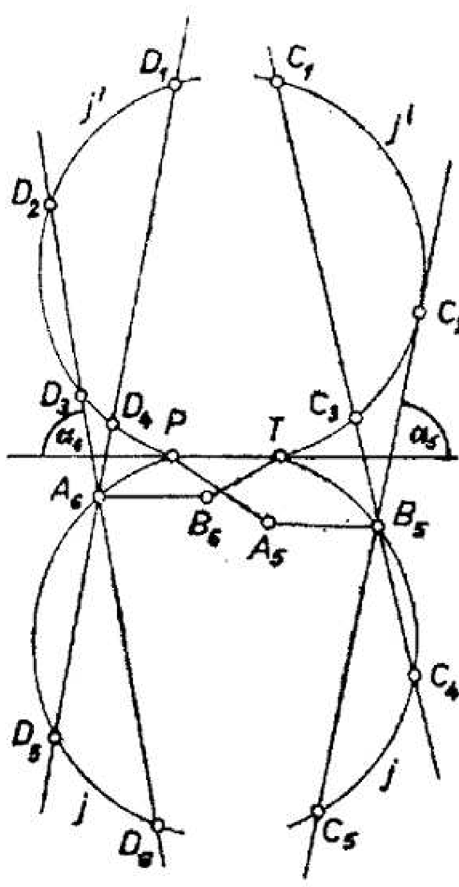
vagyis $C$-ből a $PT$ szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint $B$-ből. $C$ tehát rajta van azon két $j$, $j'$ látókörív valamelyikén, melyeknek pontjaiból a $PT$ szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint $B$-ből. Másrészt $C$ rajta van a $B$-n átmenő, $AB$-vel $\alpha$ szöget bezáró $h$ egyenesen is ($CBA\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$), tehát $C$ e két mértani hely közös pontja.

Kimutatjuk, hogy e közös pontok bármelyike megfelel $C$-ként – kivéve természetesen $B$-t. Mivel $C$ rajta van $h$-n, azért a paralelogramma szögei megfelelők, továbbá $PD \| TC$. Másrészt $C$ rajta van $j$ és $j'$ valamelyikén; ezért $DPC\sphericalangle = PCT\sphericalangle = PBT\sphericalangle = BPA\sphericalangle$, mint állítottuk.

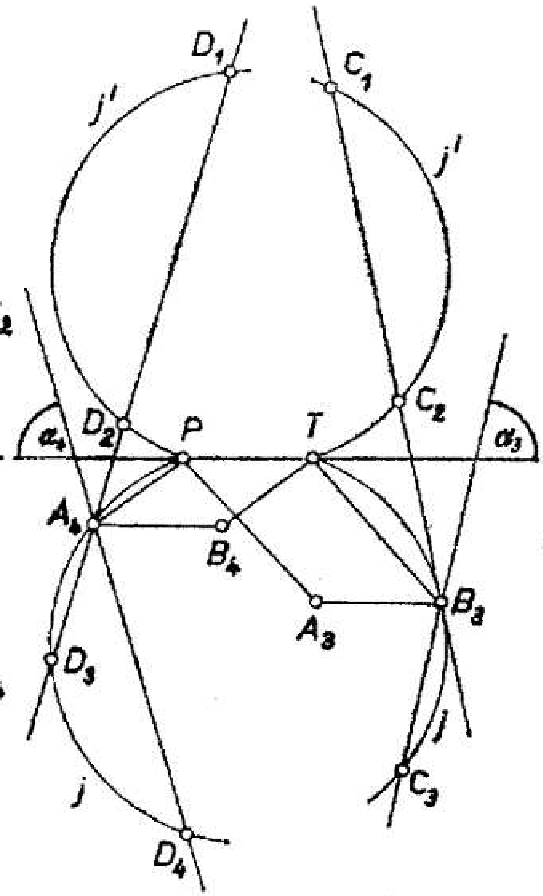
Ezek alapján a szerkesztés a következő: párhuzamost húzunk $P$-n át $AB$-vel és $B$-n át $AP$-vel, e két egyenes metszéspontja $T$. Megrajzoljuk a $BPT$ háromszög köré írt kör $B$-t tartalmazó $PT = j$ ívét és ennek $PT$-re, való $j'$ tükörképét. Ezután $B$-n át meghúzzuk azt a $h$ egyenest, amely $AB$-vel $\alpha$ szöget zár be. Ekkor $h$-nak $j$-vel, $j'$-vel való, $B$-től különböző közös pontja (e közös pontok bármelyike) adja a paralelogramma $C$ csúcsát.

$h$-nak mindkét ívvel legfeljebb két közös pontja van, és $j$-vel mindenesetre közös pontja $B$, azért a megoldások száma legfeljebb 3. Csak abban az esetben nem kapunk megoldást, ha $B$ a $h$-nak $j$-vel egyetlen közös pontja, és itt érintkeznek, $j'$-vel pedig nincs közös pontja. (*Ha ugyanis $h$ a $j$-t $B$-ben *metszi,* akkor van pontja a $j$, $j'$ ívekkel határolt idom belsejében, így a kilépési pont megfelel $C$-ként.)

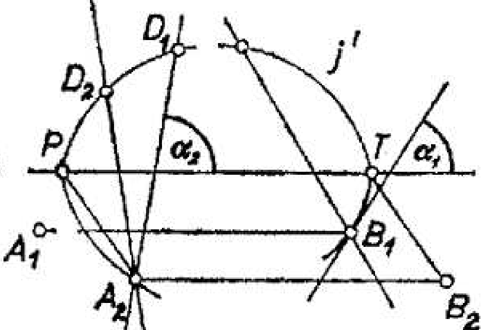
Ha elejtjük azt az előírást, hogy az adott szög a paralelogramma $A$-nál levő szöge legyen, akkor $h$-nak az $AB$ egyenesre való $h^*$ tükörképe, is tekintetbe veendő. Ekkor a megoldások száma 6, 5, 4, 3, 2 vagy 1 (a 4–6. ábrákon példákat látunk ilyen helyzetekre, 1 megoldás van az 1–3. ábrák helyzeteiben is). Kimutatjuk ugyanis, hogy így minden esetben létezik legalább 1 megoldás. (A 4–6. ábrák 2–2 felén csak $P$ és $T$ közös. )



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Elég az olyan helyzeteivel foglalkoznunk $h^*$-nak, amelyekben fentebb $h$ nem adott megoldást. Ekkor $h^*$ – amennyiben különböző a $h$-tól – nem érinti, hanem metszi $j$-t $B$-ben és a fenti (*) megjegyzés szerint megoldást szolgáltat. Ha pedig $h^*$ egybeesik $h$-val, akkor $\alpha = 90^\circ$ (mert $\alpha = 0^\circ$ nyilvánvalóan nem jön szóba), így $h$ merőleges $PT$-re, és mivel $B$-ben érinti $j$-t, azért a szimmetria miatt $B$-nek $PT$-re való tükörképében érinti $j'$-t, ez a közös pont megoldást ad.

Könnyű belátni, hogy $j$, $j'$ az I. és II. megoldásban szerepelt $i$, $i'$ körívpárból $AP$ irányú és nagyságú eltolással áll elő, hogy ugyanez áll fenn $h$ és az I. megoldásbeli $e$ egyenes között, végül hogy a II. megoldásbeli $g$ egyenes az $e$ tükörképe $F$-re. Ezért a III. megoldásra adott diszkusszió a megfelelő változtatásokkal az I. és II. megoldásra is érvényes.