

Az utolsó egyenletnek csak olyan megoldása lehet, amelyikben egyik ismeretlen sem 0, így létezik a reciprokuk. A harmadik egyenletben az állandót a jobb oldalra véve, majd az első három egyenlet reciprokát véve, elsőfokú egyenletrendszert kapunk az ismeretlenek reciprokaira:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = c.$$

Innen bármely három ismeretlen kifejezhető a negyedikkel és a negyedik egyenletbe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk. Célszerű lesz azonban először annak is a reciprokát venni és  $x$ -et és  $y$ -t, valamint  $z$ -t és  $u$ -t együtt tartva az első és a harmadik egyenlet felhasználásával átalakítani az egyenletet:

$$\frac{x + y + z + u}{xyzu} = \frac{x + y}{xy} \cdot \frac{1}{zu} + \frac{z + u}{zu} \cdot \frac{1}{xy} = a \frac{1}{zu} + c \frac{1}{xy} = d.$$

Most kifejezzük  $\frac{1}{y}$ -nal a többi ismeretlen reciprokát és az utolsó egyenletbe helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= a - \frac{1}{y}, & \frac{1}{z} &= b - \frac{1}{y}, & \frac{1}{u} &= c - \frac{1}{z} = c - b + \frac{1}{y}; \\ a \left( b - \frac{1}{y} \right) \left( c - b + \frac{1}{y} \right) + c \left( a - \frac{1}{y} \right) \frac{1}{y} &= d. \end{aligned}$$

Ebből rendezéssel a következő egyenletet kapjuk  $\frac{1}{y}$ -ra:

$$(1) \quad (a + c) \left( \frac{1}{y} \right)^2 - 2ab \left( \frac{1}{y} \right) + ab^2 - abc + d = 0.$$

Az első konstans értékek mellett elsőfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{y} + 7 &= 0, & \frac{1}{y} &= \frac{7}{4}, & \text{így} \\ \frac{1}{x} &= -\frac{3}{4}, & \frac{1}{z} &= \frac{1}{4}, & \frac{1}{u} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

és az egyenletrendszer megoldása

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{4}{7}, \quad z = 4, \quad u = -\frac{4}{5}.$$

Ez valóban megoldás, mert  $x + y$ ,  $y + z$ ,  $z + u$  és  $x + y + z + u$  egyike sem 0, és így minden végzett átalakítás megfordítható.

A matematikai osztályok feladata esetében (1) így alakul:

$$\left( \frac{1}{y} \right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{y} - 16 = 0.$$

Mindkét oldalhoz 25-öt adva

$$\left( \frac{1}{y} + 3 \right)^2 = 25,$$

amiből a következő két lehetőség adódik:  $\frac{1}{y} = 2$ , és  $\frac{1}{y} = -8$ . Ennek megfelelően a többi ismeretlen reciprokára is két értéket kapunk:

$$\frac{1}{y} = 2 \text{ esetén} \quad \frac{1}{x} = -1, \quad \frac{1}{z} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{1}{u} = -3;$$

$$\frac{1}{y} = 8 \text{ esetén} \quad \frac{1}{x} = 9, \quad \frac{1}{z} = 11 \quad \text{és} \quad \frac{1}{u} = -13.$$

Innen a következő két gyökrendszer adódik:

$$x = -1, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 1 \quad \text{és} \quad u = -\frac{1}{3},$$

$$x = \frac{1}{9}, \quad y = -\frac{1}{8}, \quad z = \frac{1}{11} \quad \text{és} \quad u = -\frac{1}{13}.$$

Ismét mindkét számnégyes megoldása az egyenletrendszernek.