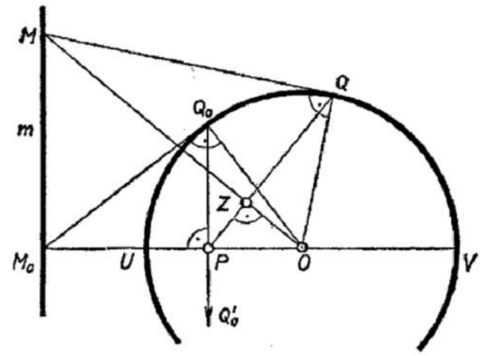
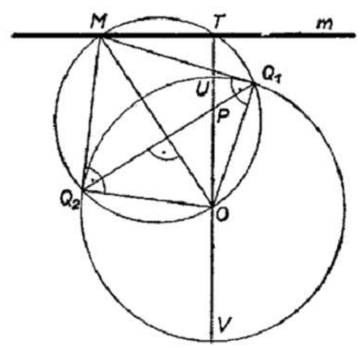
I. megoldás. Csak a kör O középpontjától különböző P pontok esetével kell foglalkoznunk, mert ha P egybeesik O-val, akkor Q semmilyen helyzetében nem jön létre az M metszéspont. Nem jön létre az M pont akkor sem, ha P különbözik O-tól, de Q a körből OP-vel kimetszett UV átmérő bármelyik végpontjában van.

Megszerkesztve M-et Q néhány helyzetéhez, a kapott pontok egy egyenesbe esnek, amely merőleges OP-re. Megmutatjuk, hogy a mértani hely valóban egyenes.





A mértani helynek van pontja az OP egyenesen. Akkor kapjuk ezt, amikor az O-n át PQ-ra állított merőleges maga OP, vagyis amikor PQ merőleges OP-re, más szóval Q a kör P-n átmenő, OP-re merőleges Q_0Q_0' húrjának valamelyik végpontjában van. Legyen a Q_0-hoz és Q_0'-höz tartozó pont M_0. Ekkor az OQ_0M_0 és OPQ_0 derékszögű háromszögek hasonlók, mert O-nál levő szögük közös, így

$$M_0O : Q_0O = Q_0O : PO, \qquad M_0O \cdot PO = Q_0O^2.$$

(2)

M_0 az OP félegyenesen van.

Legyen a körnek egy az U, V, Q_0, Q_0' pontoktól különböző pontja Q, és messe OM a PQ egyenest Z-ben. Az OQM és OZQ háromszögekből az előbbiekhez hasonlóan, majd felhasználva (2)-t

$$MO \cdot ZO = QO^2 = Q_0O^2 = M_0O \cdot PO, \quad \text{tehát}$$
$$MO : M_0O = PO : ZO.$$

A két egyenlő arány tagjai az MM_0O és PZO háromszögek O-ból kiinduló oldalai. E háromszögek O-nál levő szöge közös, így hasonlók, ezért $MM_0O\sphericalangle = PZO\sphericalangle = 90^\circ$. Ezzel beláttuk, hogy M valóban mindig az M_0-ban OM_0-ra, vagyis OP-re merőlegesen álló m egyenesen van.

m minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Láttuk ugyanis, hogy M_0 a kört befutó pont Q_0 és Q_0' helyzeteihez tartozik hozzá. Legyen m-nek egy az M_0-tól különböző pontja M^*, és az M^*-ból a körhöz húzott egyik érintő érintési pontja Q^*. Ez csak M^*-ot szolgáltathatja, mert U-tól és V-től különbözik, m-en levő pontot szolgáltat, de a Q^*-ban húzott érintő egyetlen közös pontja m-mel M^*, tehát M^* valóban hozzátartozik a mértani helyhez.

Mindezek szerint a keresett mértani hely az OP félegyenesre a (2)-nek eleget tevő M_0 pontjában állított merőleges.

II. megoldás. P-n át tetszés szerinti, de O-n át nem menő egyenest húzva, ennek a körrel való Q_1, Q_2 metszéspontjaihoz közös M pont tartozik. Ugyanis M-mel a Q_1-beli és Q_2-beli érintők metszéspontját jelölve az MQ_1OQ_2 négyszög deltoid, mert O-ból kiinduló oldalai, valamint a végpontjaiknál levő szögek egyenlők, tehát MO átlója merőleges a Q_1Q_2 átlóra. Ez pedig azonos a PQ_1, PQ_2 egyenessel, tehát az előírás szerint Q_1-hez és Q_2-höz M tartozik hozzá.

A deltoid köré kör írható, mert a szemben fekvő Q_1, Q_2 csúcsainál levő szögek összege két derékszöggel egyenlő, így MO e körben átmérő. Messe ez a kör az OP egyenest másodszor T-ben, így Thalész tétele szerint az OTM szög derékszög.

Könnyű belátni, hogy T helyzete független a Q_1Q_2 egyenes megválasztásától. A deltoid köré írt körnek TO és Q_1Q_2 a P-n átmenő húrjai, így

$$PT \cdot PO = PQ_1 \cdot PQ_2.$$

Hasonlóan az adott körből

$$PQ_1 \cdot PQ_2 = PU \cdot PV,$$

ahol U, V ismét az adott körnek PO-n levő pontjai, így

$$PT \cdot PO = PU \cdot PV.$$

Itt PO, PU és PV állandó, tehát PT is állandó, amint állítottuk.

Ezek szerint M mindig az OP egyenesre az állandó T pontban állított m merőlegesen van.

Eredményünk alapján m az M egyetlen helyzetéből megszerkeszthető. Ha pl. a P-n át választott egyenes merőleges OP-re, akkor M az OP-n, tehát éppen T-ben adódik.

Az I. megoldáshoz hasonlóan látható be, hogy m minden pontja a mozgó pont egy helyzetéhez tartozik, m a keresett mértani hely.