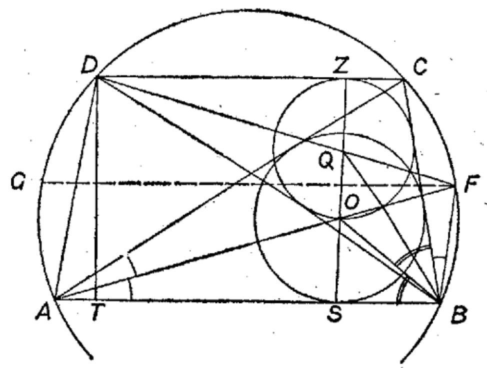
I. megoldás. Legyen az adott egyenlő szárú trapéz $ABCD$, ahol a csúcsokat úgy betűztük, hogy $AB \| CD$ és $AB \geq CD$ álljon. Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör középpontját O-val, a BCD háromszögbe írtét Q-val, az előbbi kör érintési pontját AB-n S-sel, az utóbbiét CD-n Z-vel. A feladat állítása igazolást nyer azzal, ha megmutatjuk, hogy SZ merőleges a párhuzamos oldalakra, hiszen O az AB-re S-ben emelt merőlegesen van, Q pedig a CD-re Z-ben állított merőlegesen. D vetületét AB-n T-vel jelölve azt mutatjuk meg, hogy $DTSZ$ téglalap. Ehhez elég megmutatni, hogy $DZ = TS$, hiszen ez a két oldal párhuzamos és merőleges DT-re.

A háromszög csúcsainak a beírt kör érintési pontjától való távolsága és az oldalak hossza közti ismert összefüggés szerint

$$AS = \frac{1}{2}(AB + AC - BC), \qquad DZ = \frac{1}{2}(DC + DB - BC).$$

A T pont az AB szakaszon van (esetleg egybeesik A-val), így a TS szakasz, figyelembe véve, hogy az átlók egyenlők,



$$\begin{aligned} TS &= AS - AT = \\ &= \frac{1}{2}(AB + DB - BC) - \frac{1}{2}(AB - CD) = \\ &= \frac{1}{2}(DB + CD - BC) = DZ, \end{aligned}$$

$DTSZ$ tehát valóban téglalap. (Nem lehet, hogy O és Q egybeessék, s így a rajtuk átmenő egyenes iránya határozatlan, mert akkor a körök is egybeesnének, hiszen mindkettő érinti BC-t; de pl. az ABC háromszögbe írt kör nem érintheti CD-t, mert CD-nek C az egyetlen közös pontja a háromszöggel, az pedig a körön kívül van.

Megjegyzés. Hasonlóan lehet belátni, hogy a BCA és BOD háromszög külső érintő köreinek középpontjai – alkalmas páronként összekötve – ugyancsak az AB-re merőleges egyeneseket adnak.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. A trapéz köré kör írható. Legyen a kör A-t (és D-t) nem tartalmazó BC ívének felezőpontja F. Megmutatjuk, hogy az OFQ háromszög egyenlő szárú és OQ-ra merőleges szimmetriatengelye párhuzamos a trapéz párhuzamos oldalaival. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Az állítás első része abból következik, hogy OFB és QFB egyenlő szárú háromszögek. AO és BO szögfelezők, és előbbi átmegy F-en. Így, felhasználva a külső szög és a kerületi szög tételét:

$$\begin{aligned} FOB\sphericalangle &= FAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle = FAC\sphericalangle + OBC\sphericalangle = \\ &= FBC\sphericalangle + CBO\sphericalangle = FBO\sphericalangle. \end{aligned}$$

Hasonlóan látható a QFB háromszög egyenlő szárú volta is. A kettőből $OF = BF = QF$, tehát OFQ is egyenlő szárú háromszög. Szimmetriatengelye az $OFQ\sphericalangle = AFD\sphericalangle$ felezője, átmegy a B-t nem tartalmazó AD ív G felezőpontján. Ez az F pont tükörképe a trapéz szimmetriatengelyére, így FG valóban párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, OQ tehát merőleges rájuk.