Ha az N számban a számjegyek száma páros, akkor a feladat állítására találhatók ellenpéldák, pl.

$$\sqrt{87} > 87 - 78 = 9, \qquad \sqrt{8108} > 8108 - 8018 = 90.$$

Páratlan számú számjeggyel írt N számokra viszont az állítás igaz, először ezt bizonyítjuk be; majd a páros esetben meghatározzuk azokat a számokat, amelyekre az állítás nem érvényes.[1]

I. Legyen N jegyeinek száma $2k+1$. Ekkor N kisebb a legkisebb $2k+2$ jegyű számnál, ami 10^{2k+1} ezért

$$\sqrt{N} < \sqrt{10^{2k+1}} = 10^k \cdot \sqrt{10} < 4 \cdot 10^k. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy $N - F$ semmilyen megengedett N-re nem kisebb a négyzetgyökre itt talált felső korlátnál.

Az N szám balról számított $k+1$-edik számjegyének jobbról számított sorszáma is $k+1$, így ennek a jegynek a helyi értéke F-ben ugyanannyi lesz, mint volt N-ben, ti. 10^k. Jelöljük ezt a számjegyet j-vel, az N-ben az első k számú jeggyel, illetőleg az utolsó k számú jeggyel írt számot pedig N_1-gyel, illetőleg N_2-vel. N_1 utolsó számjegyének helyi értéke az N-ben 10^{k+1}, ezért

$$N = N_1 \cdot 10^{k+1} + j \cdot 10^k + N_2.$$

(N_1 valódi k-jegyű szám, vagyis balról első számjegye nem kisebb 1-nél, N_2 azonban kezdődhet helypótló 0-val is.) Legyen az N_1, N_2 szám jegyeinek fordított sorrendben való írásával előálló k-jegyű szám F_1, illetőleg F_2 (mindkettő kezdődhet helypótló 0-val), így

$$F = F_2 \cdot 10^{k+1} + j \cdot 10^k + F_1, \text{ tehát}$$

$$N - F = (N_1 - F_2) \cdot 10^{k+1} - (F_1 - N_2) \tag{3}$$

N_1 és F_2 különbözők, mert különben N számjegysorozata szimmetrikus volna j-re, s ezért $N = F$ állna. Így $N > F$ miatt $N_1 - F_2 \geqq 1$. Másrészt a kivonandó nem nagyobb a k számú 9-essel írott számnál, $10^k - 1$-nél, így (2)-t is tekintetbe véve

$$N - F > 1 \cdot 10^{k+1} - 10^k = 9 \cdot 10^k > 4 \cdot 10^k > \sqrt{N}.$$

Ezzel a feladat állítását a páratlan számú jeggyel írt természetes számokra bebizonyítottuk.

II. Ha N számjegyeinek száma $2k$, akkor $N < 10^{2k}$, és így

$$\sqrt{N} < 10^k. \tag{4}$$

Ebben az esetben a fenti jelöléseket tovább használva

$$N = N_1 \cdot 10^k + N_2, \qquad F = F_2 \cdot 10^k + F_1,$$
$$N - F = (N_1 - F_2) \cdot 10^k - (F_1 - N_2),$$

és $N - F > 0$ miatt ismét szükségképpen $N_1 > F_2$. Továbbá a második zárójelbeli különbség most is kisebb 10^k-nál. Ezért

$$N - F > (N_1 - F_2) \cdot 10^k - 10^k,$$

és így $N_1 - F_2 \geqq 2$ esetén $N - F$ nagyobb a (4)-beli felső korlátnál, tehát az (1)-et nem teljesítő számban csak $N_1 - F_2 = 1$ lehet, azaz $N_1 = F_2 + 1$. Ha F_2 9-esre végződik, akkor N_1 0-ra, így F_1 első jegye 0, N_2-é 9, tehát ekkor is

$$N - F = 10^k + (N_2 - F_1) > 10^k.$$

Így csak az lehetséges, hogy F_2 utolsó – s így N_2 első – jegye 1-gyel kisebb, mint N_1 utolsó, tehát F_1 első jegye, a többi jegyek N_1-ben és F_2-ben, tehát F_1-ben és N_2-ben is megegyeznek. Ekkor $F_1 - N_2 = 10k^{k-1}$,

$$N - F = 10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}.$$

Ezek szerint csak akkor állhat fenn (1) helyett $\sqrt{N} \geqq N - F$, ha (négyzetre emelve)

$$N > (N - F)^2 = 81 \cdot 10^{2k-2} = 8{,}1 \cdot 10^{2k-1}. \tag{6}$$

Megállapításainkat összefoglalva $2k = 2$ esetén (6) így alakul: $N \geqq 81$, vagyis első jegye 8 vagy 9, második jegye pedig a fentiek szerint 1-gyel kisebb; tehát 2 kétjegyű ellenpélda van: 87 és 98.

[1] Mint a versenyről kiadott jelentés közölte – lásd K. M. L. (31) 1965. 3. o. – a feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt az a megszorítás, hogy az allítás páratlan számú számjeggyel írt természetes számokra bizonyítandó. – *Szerk.*

$2k \geqq 4$ esetén a $2k$-jegyű N szám akkor nem teljesíti (1)-et, ha középső két jegyével írt szám a

$$10, \quad 21, \quad 32, \quad 43, \quad 54, \quad 65, \quad 76, \quad 87, \quad 98$$

számok valamelyike, az ezt megelőző $k-1$ jegyű szám első két jegyével írt szám a

$$81, \quad 82, \quad \ldots, \quad 89, \quad 90, \quad 91, \quad \ldots, \quad 99$$

számok valamelyike, további $k-3$ számjegye ($k \geqq 4$ esetén) tetszés szerinti, végül utolsó $k-1$ jegye fordított sorrendben rendre egyenlő az első $k-1$ jegyével.

$2k = 4$ esetén a második számjegyre mindkét feltételnek teljesülnie kell, ezért az első két számjegy nem lehet 90, a 4-jegyű ellenpéldák száma 18. Hatjegyű ellenpélda $19 \cdot 9 = 171$ van, $k \geqq 3$ esetén a $2k$ jegyű ellenpéldák száma $19 \cdot 10^{k-3} \cdot 9 = 171 \cdot 10^{k-3}$.