Az egyenlőtlenséget az átrendezett

$$(2n)^n < (2n+1)^n - (2n-1)^n \tag{1a}$$

alakban fogjuk bizonyítani. Rendezzük a jobb oldali hatványokat $2n$ hatványai szerint. Mind a két kifejezés $(a+b)^n$ alakú, ahol $a=2n$, és b az egyik esetben 1, a másik esetben -1. Az n-edik hatvány egy n tényezős szorzatot jelent. Ennek a tagokra bontott alakját úgy kapjuk, hogy minden lehető módon kiveszünk mindegyik tényezőből egy-egy tagot, ezeket összeszorozzuk, és az összes ilyen szorzatokat összeadjuk.

Végezzük a fenti két hatvány tagokra bontását párhuzamosan úgy, hogy mindkettőben ugyanannyiadik tényezőkből választjuk a $2n$-et és a többiből az első kéttagúnál a $+1$-et, a másodiknál a -1-et. Ha páros számú tényezőből választjuk a $+1$-et, ill. a -1-et, akkor egyenlő tagok keletkeznek, és ezek a kivonáskor kiesnek (így az a két tag is, amelyhez mindegyik tényezőből a $2n$-et választjuk ki). Ha viszont páratlan számú tényezőből választjuk a $+1$-et, illetőleg a -1-et, akkor egyenlő abszolút értékű tagok keletkeznek, de $(2n+1)^n$-ből pozitív előjellel, $(2n-1)^n$-ből negatív előjellel, a kivonásnál tehát ezek kétszerese adódik. Az összes ilyen tagok összege adja a jobb oldalt. Azt csökkentjük tehát, ha ezek közül a tagok közül csak egyeseket veszünk tekintetbe.

Nézzük azokat a tagokat, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy híjján minden tényezőből a $2n$-et választjuk. Egyrészt ezek mindegyike $2(2n)^{n-1}$-t ad a különbséghez, másrészt ilyen tag n-szer keletkezik, mert az a tényező, amelyikből nem a $2n$-et (tehát az 1-et, ill. a -1-et) választottuk, vagy az első vagy a második stb. vagy az n-edik. Az (1a) jobb oldala tehát legalább $n\cdot 2\cdot (2n)^{n-1}=(2n)^n$, és nagyobb ennél, ha fennáll az a lehetőség is, hogy három tényezőből válasszuk a $+1$-et, ill. a -1-et, vagyis ha n legalább 3. Ezzel az egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A követett gondolatmenet mutatja, hogy $(a+b)^n$-t a és b hatványai szerint rendezve $a^k b^{n-k}$ alakú tagok keletkeznek, ahol $k=0,1,2,\ldots,n$ lehet, és a felírt tag együtthatója az a szám, ahányféleképpen n különböző dolog közül k-t ki lehet választani, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel. (Ennyi módon választhatunk ki k tényezőt, hogy azokból a-t, a többiből b-t vegyük ki tényezőül.)

II. megoldás. Kézenfekvő (1a) jobb oldalának első tagjából levonni, a másodikhoz hozzáadni $(2n)^n$-t, mivel a kifejezést $2n$ egy hatványával akarjuk összehasonlítani. Ekkor a fellépő különbségekben az alapok különbsége 1, és ezért az egyenlő kitevőjű hatványok különbsége így alakítható át:

$$\begin{gathered}
(2n+1)^n-(2n-1)^n=(2n+1)^n-(2n)^n+(2n)^n-(2n-1)^n=\\
=(2n+1)^{n-1}+(2n+1)^{n-2}\cdot(2n)+(2n+1)^{n-3}(2n)^2+\ldots+(2n+1)(2n)^{n-2}+\\
+(2n)^{n-1}+(2n)^{n-1}+(2n)^{n-2}\cdot(2n-1)+\ldots+(2n)(2n-1)^{n-2}+\\
+(2n-1)^{n-1}=[(2n+1)^{n-1}+(2n-1)^{n-1}]+(2n)[(2n+1)^{n-2}+\\
+(2n-1)^{n-2}]+\ldots+(2n)^{n-2}[(2n+1)+(2n-1)]+2\,(2n)^{n-1}.
\end{gathered}$$

A kifejezést n tagra bontottuk, így az egyenlőtlenség igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy a kifejezés növekszik, ha mindenütt, ahol előfordul, $2n+1$-et és $2n-1$-et egyidejűleg $(2n)$-nel helyettesítjük. Az utolsó előtti tagnál ez nem okoz változást, a többinél viszont nagyobbítást jelent, ugyanis ha $l>1$,

$$\begin{gathered}
(2n+1)^l+(2n-1)^l-2(2n)^l=(2n+1)^l-(2n)^l-[(2n)^l-(2n-1)^l]=\\
=(2n+1)^{l-1}+(2n+1)^{l-2}\cdot(2n)+\ldots+(2n+1)(2n)^{l-2}+(2n)^{l-1}-\\
-[(2n)^{l-1}+(2n)^{l-2}\cdot(2n-1)+\ldots(2n)(2n-1)^{l-2}+(2n-1)^{l-1}]=\\
=[(2n+1)^{l-1}-(2n-1)^{l-1}]+(2n)[(2n+1)^{l-2}-(2n-1)^{l-2}]+\ldots+\\
+(2n)^{l-2}\cdot[(2n+1)-(2n-1)]>0.
\end{gathered}$$

Ezzel a feladat állítása igazolást nyert.

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség belátható az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére vonatkozó azonosság ismételt alkalmazásával is:

$$\begin{gathered}
(2n+1)^n-(2n-1)^n=(2n+1)^n-(2n)^n+(2n)^n-(2n-1)^n=\\
=[(2n+1)^{n-1}+(2n-1)^{n-1}]+(2n)[(2n+1)^{n-2}+(2n-1)^{n-2}]+\\
+\ldots+(2n)^{n-2}\cdot[(2n+1)+(2n-1)]+2(2n)^{n-1}.
\end{gathered}$$

Itt az utolsó előtti tag egyenlő az utolsóval, a többi pedig nagyobb nála, mert ha $l>1$,

$$\begin{gathered}
(2n+1)^l+(2n-1)^l-2(2n)^l=(2n+1)^l-(2n)^l-[(2n)^l-(2n-1)^l]=\\
=(2n+1)^{l-1}-(2n-1)^{l-1}+(2n)[(2n+1)^{l-2}-(2n-1)^{l-2}+\ldots+\\
+(2n)^{l-2}\cdot[(2n+1)-(2n-1)]>0.
\end{gathered}$$

Az n tag összege tehát nagyobb, mint $n\cdot 2(2n)^{n-1}=(2n)^n$.