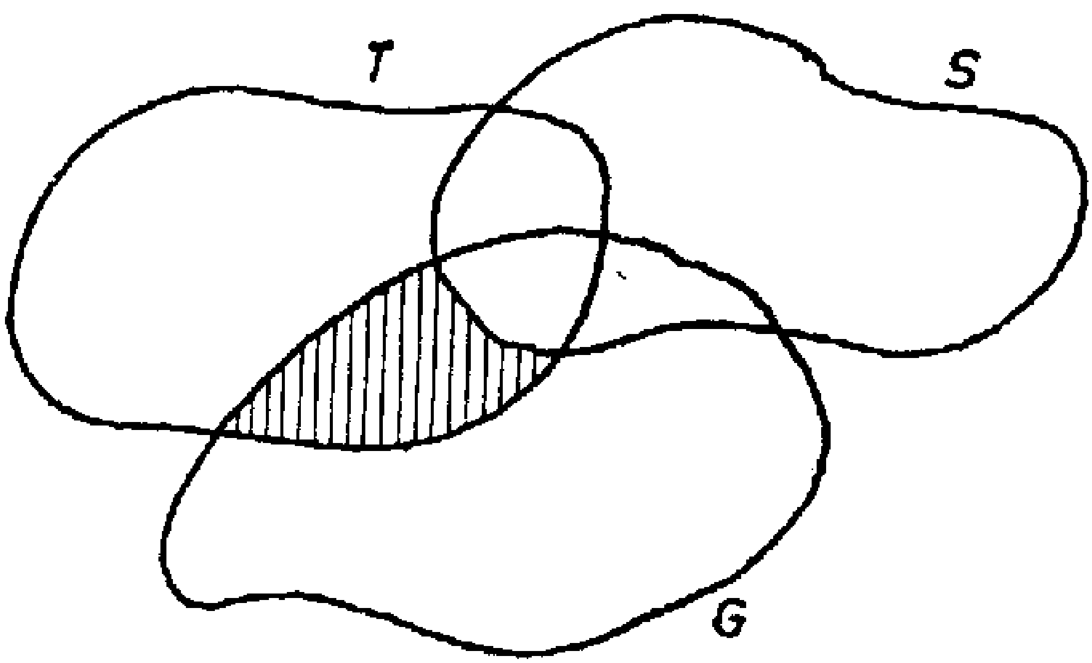
1. megoldás. Rajzoljunk a síkban egy T, egy S és egy G tartományt úgy, hogy legyen mindháromnak közös része, bármely kettő közös részének legyen olyan része, amelyik nem tartozik a harmadikhoz, és legyen mindegyiknek a másik kettőn kívül eső része is. Gondoljuk a televízió-tulajdonosokat a T-tartomány belsejének pontjaival jelölve, a szobafestőket az S pontjaival, azokat pedig, akiknek bérletük van a Gellért-fürdőbe, a G pontjaival. Ekkor a *b)* állítás azt jelenti, hogy a G-be, de S-en kívül teendő pontok, ha vannak, nem kerülhetnek T-be sem, tehát az a tartomány, ami T-hez és G-hez is tartozik, de S-en kívül fekszik, egyetlen kijelölt pontot sem tartalmaz. Ezt az ábrán vonalkázással jelöltük.



Az *a)* állítás szerint van pont a T-nek B-hez nem tartozó részében. Ez nem kerülhet a bevonalkázott részbe, tehát G-n is kívül van, vagyis olyan televízió-tulajdonost jelöl, akinek nincs bérlete a Gellért-fürdőbe. Eszerint a *c)* állítás következik *a)*-ból és *b)*-ből.

II. megoldás. A *b)* állítás így is fogalmazható : nincs olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő, de bérlete van a Gellért-fürdőbe. Eszerint egy olyan televízió-tulajdonosnak, akire az *a)* állítás teljesül, nem lehet bérlete a Gellért-fürdőbe. Mivel az *a)* állítás ilyen személy létezését mondja ki, így *a)*-ból és *b)*-ből következik a *c)* állítás.

Surányi János

Megjegyzés. egy versenyfeladathoz

Egy versenyfeladat a következő volt: *„Legyen az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság A_1 talppontja a BC szakasz belső pontja. Mindig kisebb-e az AB és AC oldalak különbsége, mint az A_1B és A_1C szakaszok különbsége? (Indokolás.)”*

Láttuk,[1] hogy a válasz tagadó, ugyanis az egyenlő szárú háromszögekben mind a két különbség nulla.

\epsfbox{1965.5.200.1.eps}

Az alábbiakban néhány ezzel kapcsolatban felmerülő további kérdést vizsgálunk meg. Megmutatjuk először is, hogy más ellenpélda nincs is: *ha A_1 belső pont és az A-ból kiinduló oldalakra $AB > AC$, akkor $AB - AC < A_1B - A_1C$.*

Messe az A körül AC sugárral írt kör BC-t még a C' pontban, AB-t a C” pontban. BC-nek A-hoz legközelebbi pontja A_1, és C ettől különböző pont, tehát C' is különbözik C-től, annak az AA_1 tengelyre vett tükörképe. C”- az AB szakasz belső pontja, vagyis B kívül van a körön, s így C' a BA_1 szakaszon van, tehát $A_1B - A_1C = A_1B - A_1C' = BC'$. Így a BC” $< BC'$ egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ez következik abból, hogy a $BC'C$”$\triangle C$”-nél levő szöge tompaszög, hiszen a C”-nél levő külső szöge az $AC'C$” egyenlő szárú háromszögnek az alapján levő szöge, tehát hegyesszög.

Nézzük még meg, mi a helyzet, ha A_1 pl. a BC szakasz C-n túli meghosszabbítására vagy C-be esik. Ekkor nyilvánvaló, hogy $AB > AC$; az A_1B és A_1C szakaszok különbsége BC, és ez megint kisebb, mint $AB - AC$, a háromszög-egyenlőtlenség szerint.

Ennek az esetnek a kizárása tehát nem volt lényeges, viszont azt célozta, hogy érdektelen esetek taglalása ne vonja el a figyelmet a lényegről: ellenpélda kereséséről.

---

[1] Lásd Scharnitzky Viktor: Az 1965. évi Arany Dániel tanulóversenyek I. fordulóján kitűzött feladatok megoldása (kezdők versenye), K.M.L. 31 (1965) 193-196. o.

Scharnitzky Viktor

Megjegyzés egy 1965. évi versenyfeladathoz

Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 2. feladata így szólt:

A hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.

A közölt megoldások[2] szerint a négyzet e pontot mindig belsejében tartalmazza, továbbá elég a négyzet és a háromszög közös oldalegyenesén fekvő csúcsokról kikötni, hogy hegyesszögűek legyenek.

Pelikán József versenydolgozatában felvetette azt a kérdést, hogy rögzítve a négyzetet és minden lehetséges módon köréírva hegyesszögű háromszögeket, ezek beírt köreinek középpontjai kerülhetnek-e a négyzet oldalaihoz tetszés szerint közel, vagy van olyan $\lambda > 0$, hogy ha a négyzet oldala t, akkor a körülírt háromszögek beírt köreinek középpontjai mindig legalább λt távolságra esnek a négyzet oldalaitól. Az alábbiakban meghatározzuk azon pontok mértani helyét a négyzetben, amelyek beírt körközéppontok lehetnek, és látni fogjuk, hogy ezek nem kerülhetnek tetszés szerint közel az oldalakhoz.

Legyen $DEFG$ a négyzet, ABC egy körülírt háromszöge, legyenek a B, D, E, C pontok ebben a sorrendben egy egyenesen, s legyen F, ill. G az AC, ill. AB szakaszon. Legyen az ABC háromszög beírt köre k, középpontja O.

I. Egyelőre nem kötjük ki, hogy a BAC szög hegyesszög legyen.

a) A k körnek metszenie kell az FG szakaszt; különben ugyanis átmérője legfeljebb DE lenne, ezért az EF, GD szakaszok közül legalább az egyiket, mondjuk EF-et nem metszené, s így teljes egészében az EFG szögtartományban volna, s így nem érinthetné az AC egyenest. Legyen EF és GD felezőpontja K, ill. L, akkor ezek szerint O a $KLGF$ téglalapba esik.

\epsfbox{1965.5.201.1.eps}

k nem tartalmazhatja belsejében a G pontot, mert G-ből érintő vonható hozzá. Igy O legalább annyira van G-től, mint a DE egyenestől, tehát alatta van a G fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának. Hasonlóan O az F fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának is alatta van, legyen e két parabola metszéspontja M. Ekkor O az (egy egyenes szakasz és két parabolaív által határolt) KLM idomba esik; a KL szakasz pontjai nem tartoznak hozzá e mértani helyhez.

b) Ennek a tartománynak minden pontja lehet körközéppont. Valóban, legyen O ezen idom valamely pontja. Az O körül írt, DE-t érintő k kör nem tartalmazza F-et és G-t és metszi FG-t, így az F-ből, ill. G-ből k-hoz húzott, a négyzetet nem metsző érintők és DE egy olyan háromszöget határolnak, melynek a DE egyenesen levő csúcsaiban hegyesszögei vannak és melynek a k kör beírt köre, $DEFG$ beírt négyzete.

II. Kössük ki most még, hogy A-nál is hegyesszög van.

a) Az I.*a)* alatti megállapítások természetesen érvényben maradnak. Jelöljük $DEFG$ átlóinak metszéspontját P-vel. Megmutatjuk, hogy ekkor O csak a PFG háromszög belsejében lehet! Ebből következik, hogy ha az F fókuszú parabolának és a DF átlónak a négyzetbe eső metszéspontját Q-val, a G fókuszú parabolaét és EG-ét R-rel jelöljük, O a (két egyenesszakasz és két parabolaív által határolt) $PQMR$ idomba esik; a PQ, PR szakaszok pontjai. nem tartoznak a mértani helyhez. Annak bizonyítását, hogy ezen idom minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, az olvasóra bízzuk.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy k középpontja pl. a PDG háromszögbe esik. Ekkor k nem metszi az EF egyenest, és ezért a CA oldalt az FA szakaszon érinti. A G pontból két érintőt húzhatunk k-hoz; az ezek által lemetszett háromszögek legyenek ABC és A_1B_1C. Feltehetjük, hogy a jelölést úgy választottuk, hogy k az A_1G, GB szakaszokat érinti. Be fogjuk látni, hogy a B_1A_1C és BAC szögek tompaszögek. A B_1A_1C szög a GAA_1 háromszög külső szöge, s így nagyobb a BAC szögnél.

Nyilvánvalóan $BGO\sphericalangle = A_1GO\sphericalangle$. Továbbá $DGO\sphericalangle - OGF\sphericalangle$, ezért $BGD\sphericalangle \geqq FGA_1\sphericalangle$. Legyen O vetülete FG-re T, és F tükörképe T-re F', ez O elhelyezkedése miatt a négyzet oldalának meghosszabbításán fekszik. Messe az FA érintő OT-re vett tükörképe GA_1-et A_2-ben, akkor az FGA_1 szög a $GF'A_2$ háromszög külső szöge, és így $GF'A_2\sphericalangle < FGA_1\sphericalangle$. Továbbá nyilvánvalóan $GF'A_2\sphericalangle = GFA\sphericalangle$. Ezek szerint $GFA\sphericalangle < FGA_1\sphericalangle \leqq BGD\sphericalangle$, és $GAF\sphericalangle = 180^\circ - AGF\sphericalangle - GFA\sphericalangle = 90^\circ + BGD\sphericalangle - GFA\sphericalangle > 90^\circ$, és még inkább $GA_1F\sphericalangle > 90^\circ$.

Ezzel ellentmondásra jutottunk azzal a feltevésünkkel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Tehát O a PGF háromszög belsejébe esik, és így a mértani hely valóban a $PQMR$ idom belseje, hozzávéve a QM, MR parabolaíveket.

Ennek az idomnak a négyzet kerületéhez legközelebb eső pontja M, hiszen a négyzetet P-ből, mint középpontból úgy kicsinyítve, hogy M a kerületére essék, nyilván tartalmazni fogja a $PQMR$ idomot. Legyen DE és FG felezőpontja N_1, ill. N_2, a négyzet oldala t, akkor M nyilván az N_1N_2 egyenesre esik,

$$MN_1 = t - MN_2, \qquad \text{és} \qquad MN_1 = MF = \sqrt{MN_2^2 + \frac{t^2}{4}},$$

azaz $MN_2 = 3t/8$. Tehát Pelikán kérdésére a válasz az, hogy a beírt körök középpontjai nem kerülhetnek $3t/8$-nál közelebb a négyzet kerületéhez, és ez a korlát nem javítható.

Egyébként az is látható, hogy A-nál tompaszöget is megengedve a beírt kör középpontja tetszés szerinti közel eshet a négyzet kerületéhez.

[2] Lásd Surányi János: Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K.M.L. 31 (1965) 104-112. o., szorosabban 106-110. o.