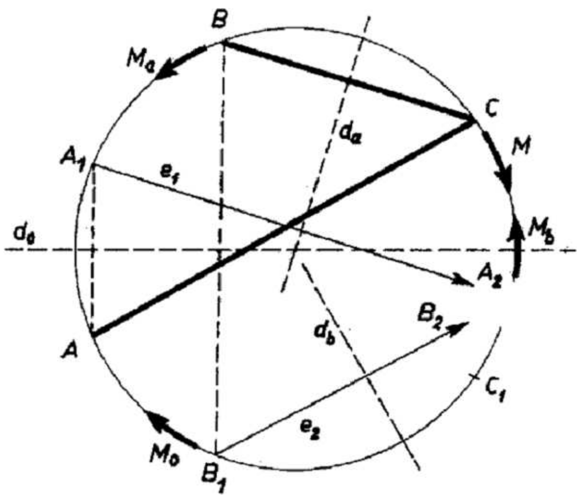
I. megoldás. Vázlatot készítve azt találjuk, hogy a kérdéses metszéspont a körön van. Könnyebb lesz ezt a többet mondó állítást bebizonyítani.



1. ábra

Mivel átmérőre tükröztünk, A_1, B_1 és C_1 is a körön van. Azt fogjuk megmutatni, hogy az A_1-en át BC-vel és a B_1-en át AC-vel párhuzamosan húzott e_1, illetőleg e_2 egyenes a körön metszi egymást. A harmadik egyenesre már könnyen átvihető lesz eredményünk.

Messe az e_1 egyenes a kört másodszor A_2-ben, az e_2 egyenes B_2-ben, így azt akarjuk belátni, hogy A_2 azonos B_2-vel. Egyelőre feltesszük, hogy A_1 és A_2 különböző pontok, úgyszintén B_1 és B_2 is (1. ábra).

A BC és A_1A_2 szakaszok a kör párhuzamos húrjai, ezért végpontjaik egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) csúcsai, páronként egymás tükörképei a mindkét húrra merőlegesen álló d_a átmérőre mint tengelyre nézve. Így a CA_2 és BA_1 húrok egyenlők, mert egymás d_a-ra vonatkozó tükörképei. Hasonlóan egy húrtrapéz csúcsai az A, A_l, B és B_1 pontok – az először végzett tükrözések miatt, mert AA_1 és BB_1 merőlegesek a felhasznált d_0 átmérőre –, valamint A, C, B_1 és B_2 is, a másodszorra szerkesztett párhuzamos miatt, itt a szimmetriatengely az AC-re merőleges d_b átmérő. Ezért

(1) $$BA_1 = B_1A = B_2C \quad \text{és így} \quad CA_2 = B_2C$$

Eszerint A_2 és B_2 a kömek C-től egyenlő távolságra levő pontjai, tehát vagy egymás tükörképei a C-ből kiinduló átmérőre nézve, vagy egybeesnek. Csak azt kell már belátnunk, hogy az utóbbi eset áll fenn.

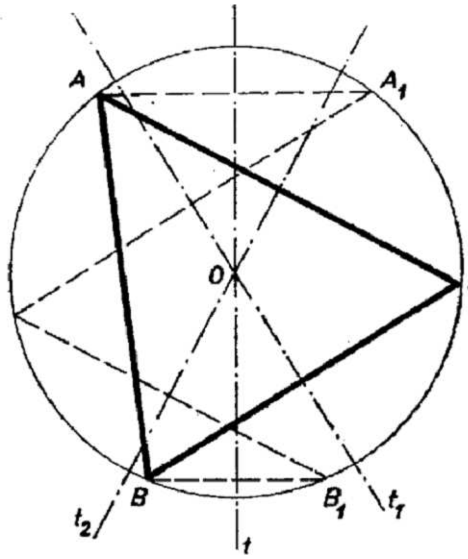
Mozgassunk egy M pontot a körön C-ből A_2-be a köztük levő két körív valamelyikén, és tekintsük azt a mozgást, amit M-nek d_a-ra való M_a tükörképe végez, továbbá M_a-nak d_0-ra való M_0 tükörképe, végül amit M_0-nak d_b-re való M_b tükörképe végez. Az (1) alatti egyenlő húrok mindegyikének végpontjai a kört úgy osztják két-két ívre, hogy a részívek páronként egyenlők, és az M, M_a, M_0, M_b pontok az egyenlő hosszú íveket írják le. A pontok mozgása mindig a kör középpontja körüli forgás, amelynek iránya az egymás utáni párokban a tükrözés miatt ellentétes. Igy M és M_0 forgási iránya megegyező, mert mindegyik ellentétes irányú M_a forgásával, és hasonlóan M_b iránya is ellentétes M-ével. Ezért az M és M_b által befutott CA_2 és B_2C ívek ellentétes irányúak, az utóbbinak a végpontja viszont azonos az előbbinek a kezdőpontjával, ezért a B_2 kezdőpont is azonos az A_2 végponttal. Ezt akartuk belátni.

Akkor is érvényes (1), valamint meggondolásunk záró része is, ha e_1 érinti a kört. Ekkor ugyanis A_2 helyén csak maga A_1 vehető, másrészt az A_1-ből kiinduló átmérő merőleges BC-re, az A_1BC háromszög egyenlő szárú, és így $CA_2 = CA_1 = BA_1$. Hasonlóan okoskodunk, ha e_2 érinti a kört. Ezzel az első két párhuzamosra vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

Meggondolásunkban az A, B, C; A_1, B_1; A_2, B_2 pontok szerepét rendre a B, C, A, B_1, C_1, B_2, C_2 pontoknak adva át, úgyszintén e_1, e_2, d_a, d_b, M_a, M_b szerepét rendre e_2, e_3, d_b, d_c, M_b, M_c-nek – ahol C_2-t, e_3-at, d_c-t és M_c-t a fentiekhez hasonlóan értelmezzük –, azt kapjuk, hogy e_2 és e_3 a körön metszik egymást, C_2 egybeesik B_2-vel, tehát az eredeti meggondolás szerint A_2-vel is. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzés. M és tükörképei mozgásának elképzelése tulajdonképpen mellőzhetővé tette az (1)-re vezető meggondolást, hiszen megismételte azt, de többet mondott nála. Az ábra azonban csak nyugalmi helyzetet mutat, szemlélete előkészítette a később mondottakat.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy a feladatban szereplő egyenesek a körön metszik egymást. Elég megmutatni, hogy az A_1-en át BC-vel és B_1-en át AC-vel húzott párhuzamosok a körön metszik egymást. A feltételeket leírhatjuk csupán a kör O középpontján átmenő tengelyekre való tükrözésekkel.



2. ábra

Jelöljük a körnek a feladat szövegében említett átmérőjét t-vel, a BC-re és a CA-ra merőleges átmérőt t_1-gyel, ill. t_2-vel (2. ábra). Ekkor A-ból a kérdéses körpontba úgy juthatunk, hogy A-t tükrözzük t-re, majd a tükörkép-pontot (A_1-et) t_1-re; hasonlóan B-ből a megfelelő metszéspontba a t-re, majd t_2-re való tükrözéssel juthatunk. Megfordítva, a kétszeri tükrözéssel kapott pontból B-be a t_2-re, majd t-re való tükrözéssel jutunk – és csak ebből a pontból, hiszen B_1 az egyetlen pont, amelyet t-re tükrözve B-t kapjuk, és olyan pont is egyetlenegy van, amelynek t_2-re vonatkozó tükörképe B_1, ugyanis B_1-nek a t_2-re vonatkozó tükörképe. Így, ha állításunk igaz, akkor A-t sorra tükrözve t-re, t_1-re, t_2-re, majd újra t-re, B-be jutunk, de fordítva is, ha utolsó állításunk igaz, akkor A-t t-re, majd t_1-re tükrözve ugyanazt a pontot kapjuk, mint ha B-t tükrözzük t-re, majd t_2-re.

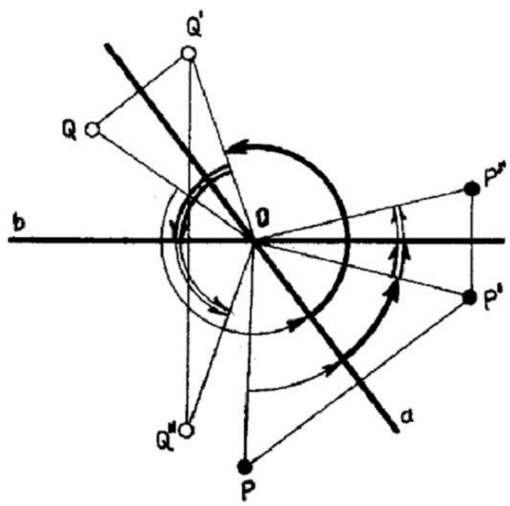
Elég tehát azt megmutatni, hogy A a fent említett négy tükrözéssel B-be megy át.

Ehhez megmutatjuk, hogy két egymást metsző tengelyre történő, egymás utáni tükrözés eredménye ugyanaz, mint ha metszéspontjuk körül egy kétszer akkora forgatást végzünk, mint ami az első tükrözés tengelyét a másodikéba viszi át.

Ebből átfogalmazott állításunk helyessége következik, hiszen A-t a t, majd. a t_1 tengelyre tükrözve az eredmény a kör O középpontja körül a t-t t_1-be vivő forgás kétszeresével való elforgatással helyettesíthető. Az ez utáni tükrözés t_2-re, majd t-re annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amely t_2-t t-be viszi át. A két forgatást egymás után elvégezve a forgatások szögei összeadódnak, és ez a forgásszög-összeg független a forgatások sorrendjétől. Így a négy tükrözés együtt annak a forgatásnak a kétszeresét adja, amellyel t_2, a t-be, majd innen t_1-be forgatható. Az utoljára említett forgatás a t_2-t t_1-be vivő forgatás, vagy ennél 180° egy többszörösével nagyobb. Így kétszerese a t_2-t t_1-be vivő forgatás kétszeresétől csak 360° egy többszörösével különbözhet, azonban 360° egy többszörösével való forgatás minden pontot önmagába visz át.

A négy egymás utáni tükrözés eredménye tehát az O körül a t_2-t t_1-be vivő forgatás kétszerese, ez pedig A-t éppen B-be viszi át; ezt akartuk bizonyítani.

A két tükrözés összetételére vonatkozó állítást kell tehát még belátnunk. Legyen a két egymást metsző tükörtengely a és b, metszéspontjuk O.



3. ábra

Egy P pont a-ra vonatkozó tükörképét megkaphatjuk úgy is, hogy az OP szakaszt O körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban – ezt szokás pozitív forgásiránynak tekinteni – a-ig forgatjuk, majd innen ugyanekkora szöggel tovább. az OP' helyzetbe. Ekkor P' a P tükörképe a-ra (3. ábra). A P-t P'-be vivő forgás szöge függ P helyzetétől. P'-t a b-re vonatkozó P" tükörképébe ismét átvihetjük úgy, hogy OP'-t pozitív irányban b-ig forgatjuk, majd innen még ugyanekkora szöggel továbbforgatva jutunk az OP" szakaszhoz. Így végül OP-t annak a forgásnak a kétszeresével forgattuk el (a 3. ábra vastagabban jelölt ívei), amely a-t P'-n áthaladva b-be viszi át. Ez vagy az a-t pozitív irányban b-be vivő legkisebb forgás, vagy az annál $180°$-kal nagyobb forgás kétszerese; eredménye tehát minden esetben ugyanaz, mint az a-t b-be vivő forgatás kétszereséé, mért a $360°$-kal való továbbforgatás nem okoz változást. Ezzel segédtételünket, s így a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Itt nem kellett különválasztanunk azt az esetet, ha pl. az A_1-en át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes érinti a kört. Ekkor t_1 átmegy A_1-en, s így a rá való tükrözés A_1-et helyben hagyja.

2. Meggondolásunkban felhasználtuk, hogy egy középpont körüli egymás utáni forgatások felcserélhetők, így segédtételünk értelmében egy ponton átmenő tengelyekre vonatkozó tükrözéspárok is felcserélhetők. (Tükrözések nem cserélhetők fel, hiszen a b-re, majd a-ra való tükrözés azt a forgást adja, ami az a-ra, majd b-re való tükrözéssel egyenértékű forgatást teljes körülforgássá egészíti ki.) Így a t-re, t_1-re, t_2-re, majd t-re vonatkozó tükrözés ugyanazt eredményezi, mint ha t_2-re, t-re, újra t-re, majd t_1-re tükrözünk. Azonban a t-re való kétszeri tükrözés minden pontot helyben hagy, tehát az eredmény ugyanaz, mint ha t_2-re, majd t_1-re tükrözünk. Lényegében ezt láttuk be a megoldás során geometriailag.

3. A bizonyítandó állítást tovább alakíthatjuk, megfigyelve, hogy B-t ismét t_1-re, majd t_2-re tükrözve C-be, majd A-ba jut, és B az egyetlen pont, aminek megvan ez a tulajdonsága. Elég tehát azt megmutatni, hogy A-t sorra a t, t_1, t_2, t, t_1, t_2 tengelyekre tükrözve eredeti helyzetébe jut vissza. Ez azonnal látható, ha – előző megjegyzésünk értelmében – az első és második tükrözéspárt megcseréljük. Eszerint a hat tükrözés eredménye ugyanaz, mintha, A-t sorra a t_2, t, t, t_1, t_1, t_2 tengelyekre tükrözzük. De a t-re és újra t-re való tükrözés helyben hagyást eredményez, úgyszintén a t_1-re és ismét t_1-re való tükrözés, tehát a hat tükrözés egymásutánja ugyanazt eredményezi, mint a t_2-re, majd t_2-re való tükrözés, vagyis a helyben hagyást.

4. Az előző átfogalmazás azt jelenti, hogy a t, t_1, t_2 tengelyekre való tükrözések egymásutánja olyan transzformációt eredményez, amelyet kétszer egymásután alkalmazva minden pont eredeti helyzetébe kerül vissza. Valóban, a három tükrözés eredménye egyetlen tükrözéssel helyettesíthető. A t-re és t_1-re való tükrözés ugyanis annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amelyik t-t pozitív irányban t_1-be viszi át. Ugyanerre a forgatásra vezet azonban minden olyan O-n átmenő tengelypárra vonatkozó tükrözés is, amelyek elsőjét a másodikba ugyanakkora forgás viszi át, mint t-t t_1-be. Legyen $t*$ az a tengely, amelyet t_2-be ugyanaz a forgatás viszi át, mint t-t t_1-be. Ekkor a t-re, t_1-re, majd t_2-re való tükrözés eredménye ugyanaz, mint a $t*$-ra, t_2-re, majd t_2-re való tükrözésé, ezé pedig ugyanaz, mint a $t*$-ra való tükrözésé. Ezzel állításunkat igazoltuk.