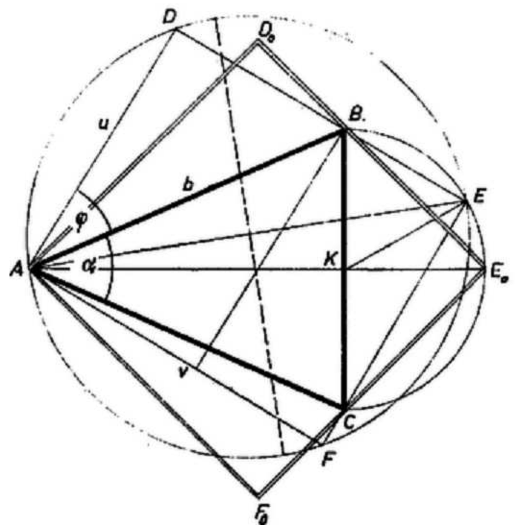
I. megoldás. Legyen egy az ABC háromszög köré írható, A csúcsú téglalapok közül $ADEF$ úgy, hogy a DE oldal B-n, EF pedig C-n halad át (5. ábra). Így BEC derékszög, ezért E a BC átmérő fölötti Thalész körön van, éspedig ennek azon a félkörén, amelyet a BC egyenes elválaszt A-tól. Jelöljük a kör középpontját (BC felezőpontját) K-val.



5. ábra

a) Megmutatjuk, hogy a keresett legnagyobb területű körülírt téglalapot akkor kapjuk, ha E a mondott félkörív E_0 felezőpontjában adódik. Ekkor a körülírt $AD_0E_0F_0 = N_0$ téglalap négyzet, mert az AE_0 egyenes merőleges BC-re, így felezi a $BE_0C\sphericalangle = D_0E_0F_0$ szöget.

Ha $ADEF = T$ egy N_0-tól különböző, az ABC háromszög köré írt téglalap, akkor átlója rövidebb, mint AE_0, mert

$$AE < AK + KE = AK+$$
$$+KE_0 = AE_0$$

Így minden AE átlójú téglalap területe is kisebb, mint N_0-é, ugyanis e téglalapok másik két csúcsa az AE átmérőjű körön van, ennek pedig AE-től legtávolabbi pontjai az AE-re merőleges átmérő végpontjai, vagyis az egyenlő átlójú téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb; de még az AE átlójú négyzet területe is kisebb, mint N_0-é.

b) Az ABC háromszög keresett legkisebb területű körülírt téglalapját akkor kapjuk, ha a téglalap egyik oldala AB vagy AC (e két téglalap szimmetrikus az ABC háromszög tengelyére, így területeik egyenlők). Ekkor ugyanis a téglalap területe 2-szer akkora, mint az ABC háromszögé, és könnyű belátni, hogy körülírt téglalap területe ennél nem lehet kisebb. Ugyanis a B-n át EF-fel párhuzamosan húzott egyenes a körülírt téglalapot és az ABC háromszöget két részre vágja. Mindegyik rész–téglalapba be van írva egy rész–háromszög, amelyiknek egyik oldala a téglalap egy oldalán fekszik, és nem nagyobb ennél a téglalapoldalnál, az ehhez tartozó magasság a téglalap szomszédos oldala. Így a két rész–téglalap területe nem kisebb a rész–háromszögek területe 2-szeresénél, ugyanez áll tehát az ABC háromszögre és a köré írt téglalapra is. Épp kétszer akkora is csak akkor lehet a körülírt téglalap területe, mint a háromszögé, ha a téglalap egyik oldala egybeesik a háromszög egyik szárával.

II. megoldás. Használjuk ismét az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AC = AB = b$, $BAC\sphericalangle = \alpha$, $AD = u$, $AF = v$, és $BAD\sphericalangle = \varphi$. Az utóbbi szög legkisebb értéke 0, ha ti. T egyik oldala AB; legnagyobb értéke $90^\circ - \alpha$, ha ti. T egyik oldala AC:

(12) $$0^\circ \leqq = \varphi \leqq 90^\circ - \alpha.$$

T területe, az ABD és ACF derékszögű háromszögek felhasználásával

$$t = uv = b\cos\varphi \cdot b\sin(\alpha+\varphi),$$

ugyanis $ACF\sphericalangle = CAD\sphericalangle = \alpha + \varphi$.

A két szögfüggvény szorzatát a $\sin z \cos w = \big[\sin(z+w)+\sin(z-w)\big]/2$ azonosság alkalmazásával összeggé alakítjuk:

(13) $$t = \frac{b^2}{2}\big[\sin(\alpha+2\varphi)+\sin\alpha\big].$$

A zárójelben csak az első tag változik, és (12)-t 2-vel szorozva, valamint mindenütt α-t hozzáadva a változó szögre

(14) $$\alpha \leqq +2\varphi = 180^\circ - \alpha.$$

A talált intervallum bal végpontja a feltevés szerint hegyesszög, jobb végpontja tompaszög, közrezárják $90°$-ot. Itt veszi fel (13) első tagja a legnagyobb értékét, 1-et, tehát φ-nek a maximális t-t adó értékére

$$\alpha + 2\varphi = 90°\text{-ból} \qquad \frac{\alpha}{2} + \varphi = 45°,$$

vagyis t_max akkor adódik, ha AD az ABC háromszög AE_0 tengelyével $45°$-os szöget zár be. Ekkor a rá merőleges AF oldalegyenes is $45°$-ot zár be AE_0-lal, a körülírt téglalap tükrös AE_0-ra, tehát négyzet.

Az $y = \sin x$ függvény a (14) intervallum $(\alpha, 90°)$ részintervallumában nő, $(90°, 180° - a)$ részintervallumában fogy, így (13) legkisebb értéke az a és $180° - \alpha$ végpontokban felvett értékek kisebbike. A két végpontban $y = \sin x$ értéke egyenlő, tehát t-nek az

$$\alpha + 2\varphi = \alpha, \quad \text{azaz} \quad \varphi = 0° \quad \text{és az}$$
$$\alpha + 2\varphi = 180° - \alpha, \quad \text{azaz} \quad \varphi = 90° - \alpha$$

értékek esetén egyaránt minimuma van. Az első esetben AD azonos AB-vel (és D azonos B-vel), a másodikban AF azonos AC-vel (és F azonos C-vel).

Ezzel a legnagyobb és legkisebb területű körülírt téglalapok meghatározását befejeztük.