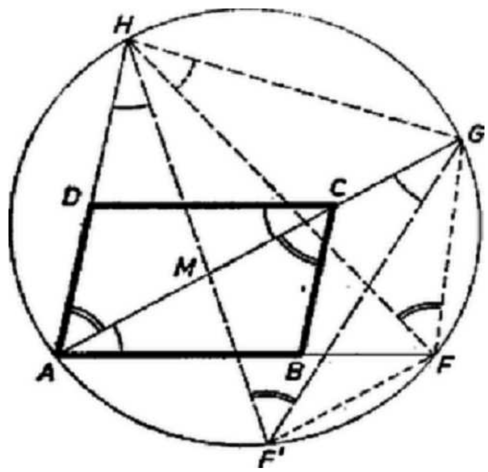
Legyen F tükörképe AG felező merőlegesére F', az AG és $F'H$ egyenesek metszéspontja M.

I. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor F, G, H sorra az A-ból B, C, D felé induló félegyenesen van. Ekkor az AC egyenes elválasztja a B és D pontokat és velük együtt az F és H pontokat is. Így az AC egyenes A és G pontjaival kettévágott körnek különböző ívein van F és H, F' pedig ugyanazon az íven van, mint F, mert $FF' \parallel AG$. Ebből következik, hogy M az AG húr belső pontja.

Legyen F tükörképe AG felező merőlegesére F', az AG és $F'H$ egyenesek metszéspontja M.

I. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor F, G, H sorra az A-ból B, C, D felé induló félegyenesen van. Ekkor az AC egyenes elválasztja a B és D pontokat és velük együtt az F és H pontokat is. Így az AC egyenes A és G pontjaival kettévágott körnek különböző ívein van F és H, F' pedig ugyanazon az íven van, mint F, mert $FF' \parallel AG$. Ebből következik, hogy M az AG húr belső pontja.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy az

$$(6) \qquad AHM, \quad ACD, \quad F'GM \quad \text{és} \quad CAB$$

háromszögek hasonlók, megfelelő szögeik egyenlők. Ebből már könnyen fog következni (6). A háromszögek megfelelő szögeire egyrészt

$$\underline{ACB\sphericalangle} = \underline{CAD\sphericalangle} = \underline{HAM\sphericalangle} = \\ HAG\sphericalangle = HF'G\sphericalangle = \underline{MF'G\sphericalangle};$$

az utolsó előtti és az azt megelőző szög azonos íven nyugvó kerületi szögek. Másrészt

$$\underline{AHM\sphericalangle} = AHF'\sphericalangle = AGF'\sphericalangle = \\ \underline{MGF'\sphericalangle} = FAG\sphericalangle = \underline{CAB\sphericalangle} = \\ = \underline{ACD\sphericalangle}.$$

A második és harmadik szög azonos íven nyugvó kerületi szögek, a negyedik és ötödik pedig egymás tükörképe.

A (6) alatti első és második háromszög hasonlóságából, illetőleg a harmadik és negyedik hasonlóságából a következő arányok egyenlősége olvasható le:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AC}{AD}, \qquad \frac{GF'}{GM} = \frac{AC}{AB}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy GF' és AF egymás tükörképei, tehát egyenlők, kapjuk, hogy

$$AD \cdot AH = AC \cdot AM, \qquad AB \cdot AF = AC \cdot GM,$$

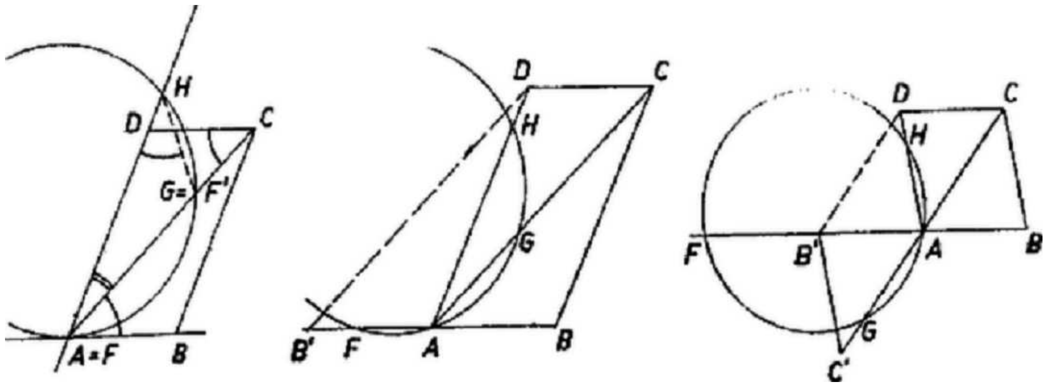
és a kettőt összeadva, mivel $AM + MG = AG$, adódik az (5) egyenlőség.

II. Megmutatjuk, hogy az (5) egyenlőség a kör minden helyzeténél érvényes marad, ha az A-tól B-vel, C-vel, ill. D-vel ellentétes irányban levő pontok távolságát negatívnak tekintjük. Ennek belátására forgassuk a kört az A pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban. A fenti bizonyítás nem alkalmazható már, ha a kör az AB oldalt érintő helyzetbe kerül (2. ábra). Ekkor $AF = 0$, másrészt az ACD és AHG háromszögek hasonlók, mert egy szögük közös és

$$ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle = GAB\sphericalangle = GHA\sphericalangle.$$

Az utolsó egyenlőségben azonos íven nyugvó kerületi szögek szerepelnek. Így

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AG}, \qquad AC \cdot AG = AD \cdot AH = AB \cdot AF + AD \cdot AH.$$



2., 3. és 4. ábra

Ha a kör továbbfordul, F az AB oldal A-n túli meghosszabbítására kerül (G és H még az AC és AD félegyeneseken lesz, 3. ábra). Jelöljük B-nek A-ra vonatkozó tükörképét B'-vel, ekkor az $ACDB$ paralelogrammára érvényes az I. alatti bizonyítás és azt adja, hogy

$$AC \cdot AG + AB' \cdot AF = AD \cdot AH,$$

azaz

$$AC \cdot AG = AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH.$$

Így ha magán az AF jelölésen a szakasz negatív előjellel vett hosszát értjük ebben az esetben, akkor az eredeti összefüggés változatlanul helyes marad.

Ha a kör továbbfordulásával G is az AC átló A-n túli meghosszabbítására kerül, akkor vegyük a B és C pontok A-ra vonatkozó B és C tükörképét. Az $ADB'C'$ paralelogrammára ismét alkalmazható az I. rész bizonyítása, s így (4. ábra)

$$AC' \cdot AG + AD \cdot AH = AB' \cdot AF.$$

azaz

$$AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH = AC \cdot (-AG).$$

Ez azonban ismét azt jelenti, hogy a II. elején mondott előjelmegállapodással (5) érvényben marad.

Ha a kör az AD-t A-ban érintő helyzeten is túlfordul, akkor korábban már tekintetbe vett körhelyzetek A-ra vonatkozó tükörképeit kapjuk. Egy ilyen tükrözés előjelmegállapodásunk szerint AF, AG és AH előjelének egyidejű megváltozását, és így (5) minden tagjának ellenkező előjelűre változását okozza, az egyenlőség helyességét tehát nem változtatja meg. Ezzel a II. alatti állítást is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható (1. ábra), hogy $ABC\triangle \sim FGH\triangle$. A megfelelő szakaszok arányát h-val jelölve $AB = h \cdot GH$, $AC = h \cdot FH$, $BC = AD = h \cdot FG$. Ezeket (5)-be beírva és h-val egyszerűsítve az $AFGH$ húrnégyszögre a következő összefüggést kapjuk:

$$AF \cdot GH + FG \cdot HA = AG \cdot FH,$$

vagyis *húrnégyszögben a szemközti oldalpárok szorzatainak az összege az átlók szorzatával egyenlő.* Ez az összefüggés PTOLEMAIOS tétele néven ismeretes. A fenti hasonlóság felhasználásával természetesen ebből a feladat állítása is könnyen következik. Ha viszont az I. alatti bizonyításban az ACD és CAB háromszög helyébe egyaránt az FHG háromszöget tesszük, akkor közvetlen bizonyítást kapunk PTOLEMAIOS tételére.

2. A versenyen a bíráló bizottság megelégedett az I. eset tárgyalásával.

Megmutatjuk, hogy az

$$AHM, \quad ACD, \quad F'GM \quad \text{és} \quad CAB \tag{6}$$

háromszögek hasonlók, megfelelő szögeik egyenlők. Ebből már könnyen fog következni (6). A háromszögek megfelelő szögeire egyrészt

$$\underline{ACB\sphericalangle} = \underline{CAD\sphericalangle} = \underline{HAM\sphericalangle} =$$
$$HAG\sphericalangle = HF'G\sphericalangle = \underline{MF'G\sphericalangle};$$

az utolsó előtti és az azt megelőző szög azonos íven nyugvó kerületi szögek. Másrészt

$$\underline{AHM\sphericalangle} = AHF'\sphericalangle = AGF'\sphericalangle =$$
$$\underline{MGF'\sphericalangle} = FAG\sphericalangle = \underline{CAB\sphericalangle} =$$
$$= \underline{ACD\sphericalangle}.$$

A második és harmadik szög azonos íven nyugvó kerületi szögek, a negyedik és ötödik pedig egymás tükörképe.

A (6) alatti első és második háromszög hasonlóságából, illetőleg a harmadik és negyedik hasonlóságából a következő arányok egyenlősége olvasható le:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AC}{AD}, \qquad \frac{GF'}{GM} = \frac{AC}{AB}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy GF' és AF egymás tükörképei, tehát egyenlők, kapjuk, hogy

$$AD \cdot AH = AC \cdot AM, \qquad AB \cdot AF = AC \cdot GM,$$

és a kettőt összeadva, mivel $AM + MG = AG$, adódik a (5) egyenlőség.

II. Megmutatjuk, hogy a (5) egyenlőség a kör minden helyzeténél érvényes marad, ha az A-tól B-vel, C-vel, ill. D-vel ellentétes irányban levő pontok távolságát negatívnak tekintjük. Ennek belátására forgassuk a kört az A pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban. A fenti bizonyítás nem alkalmazható már, ha a kör az AB oldalt érintő helyzetbe kerül (2. ábra). Ekkor $AF = 0$, másrészt az ACD és AHG háromszögek hasonlók, mert egy szögük közös és

$$ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle = GAB\sphericalangle = GHA\sphericalangle.$$

Az utolsó egyenlőségben azonos íven nyugvó kerületi szögek szerepelnek. Így

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AG}, \qquad AC \cdot AG = AD \cdot AH = AB \cdot AF + AD \cdot AH.$$

Ha a kör továbbfordul, F az AB oldal A-n túli meghosszabbítására kerül (G és H még az AC és AD félegyeneseken lesz, 3. ábra). Jelöljük B-nek A-ra vonatkozó tükörképét B'-vel, ekkor az $ACDB$ paralelogrammára érvényes az I. alatti bizonyítás és azt adja, hogy

$$AC \cdot AG + AB' \cdot AF = AD \cdot AH,$$

azaz

$$AC \cdot AG = AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH.$$

Így ha magán az AF jelölésen a szakasz negatív előjellel vett hosszát értjük ebben az esetben, akkor az eredeti összefüggés változatlanul helyes marad.

Ha a kör továbbfordulásával G is az AC átló A-n túli meghosszabbítására kerül, akkor vegyük a B és C pontok A-ra vonatkozó B és C tükörképét. Az $ADB'C'$ paralelogrammára ismét alkalmazható az I. rész bizonyítása, s így (4. ábra)

$$AC' \cdot AG + AD \cdot AH = AB' \cdot AF.$$

azaz

$$AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH = AC \cdot (-AG).$$

Ez azonban ismét azt jelenti, hogy a II. elején mondott előjelmegállapodással (5) érvényben marad.

Ha a kör az AD-t A-ban érintő helyzeten is túlfordul, akkor korábban már tekintetbe vett körhelyzetek A-ra vonatkozó tükörképeit kapjuk. Egy ilyen tükrözés előjelmegállapodásunk szerint AF, AG és AH előjelének egyidejű megváltozását, és így (5) minden tagjának ellenkező előjelűre változását okozza, az egyenlőség helyességét tehát nem változtatja meg. Ezzel a II. alatti állítást is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható (1. ábra), hogy $ABC\triangle \sim FGH\triangle$. A megfelelő szakaszok arányát h-val jelölve $AB = h \cdot GH$, $AC = h \cdot FH$, $BC = AD = h \cdot FG$. Ezeket (5)-be beírva és h-val egyszerűsítve az $AFGH$ húrnégyszögre a következő összefüggést kapjuk:

$$AF \cdot GH + FG \cdot HA = AG \cdot FH,$$

vagyis *húrnégyszögben a szemközti oldalpárok szorzatainak az összege az átlók szorzatával egyenlő.* Ez az összefüggés PTOLEMAIOS tétele néven ismeretes. A fenti hasonlóság felhasználásával természetesen ebből a feladat állítása is könnyen következik. Ha viszont az I. alatti bizonyításban az ACD és CAB háromszög helyébe egyaránt az FHG háromszöget tesszük, akkor közvetlen bizonyítást kapunk PTOLEMAIOS tételére.

2. A versenyen a bíráló bizottság megelégedett az I. eset tárgyalásával.