I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalából levonva a jobb oldalt, a keletkező k különbség nem lehet negatív. Ha a helyébe b-t, b helyébe c-t, c helyébe a-t, vagy a helyébe c-t, c helyébe b-t, b helyébe a-t írunk, a különbségben csak a tagok sorrendje változik meg, ezért feltehetjük, hogy a a számhármasban előforduló legkisebb érték, azaz

$$x = b - a \geq 0 \quad \text{és} \quad y = c - a \geq 0.$$

Fejezzük ki k-t a, x és y segítségével:

$$\begin{aligned}
k &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2 b - b^2 c - c^2 a = a^3 + (a+x)^3 + \\
&+ (a+y)^3 - a^2(a+x) - (a+x)^2(a+y) - (a+y)^2 a = \\
&= 2a(x^2 - xy + y^2) + (x^3 - x^2 y + y^3).
\end{aligned}$$

Itt egyik zárójeles kifejezés sem negatív, amint az a következő átalakításokból nyilvánvaló:

ha $x \geq y$, akkor

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= x(x-y) + y^2 \geq 0, \quad \text{és} \\
x^3 - x^2 y + y^3 &= x^2(x-y) + y^3 \geq 0;
\end{aligned}$$

ha pedig $x < y$, akkor

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= x^2 + y(y-x) > 0, \quad \text{és} \\
x^3 - x^2 y + y^3 &= x^3 + y(y^2 - x^2) > 0.
\end{aligned}$$

Egyik esetben sem lehet tehát k negatív.

A fenti átalakításokból látható, hogy 0 is egyedül akkor lesz k, tehát az eredeti egyenlőtlenség két oldala csak akkor egyenlő, ha mind a két zárójeles kifejezés 0. Ez akkor áll fenn, ha $x = y$ és közös értékük 0, azaz ha $a = b = c$.

II. megoldás. Az előző megoldás bevezető meggondolása szerint feltehetjük, hogy a c szám sem a-nál, sem b-nél nem kisebb. A bal és jobb oldal k különbségét így alakítjuk át:

$$\begin{aligned}
k &= a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) = \\
&= a^2(a-b) - b^2\big[(c-a) + (a-b)\big] + c^2(c-a) = \\
&= (a^2 - b^2)(a-b) + (c^2 - b^2)(c-a) \\
&= (a+b)(a-b)^2 + (c+b)(c-b)(c-a).
\end{aligned}$$

Itt egyik tag sem negatív, mert sem az elsőben a különbség négyzete, sem a másodikban a különbségek nem negatívok, tehát $k \geq 0$.

$k = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét tag 0, tehát ha egyrészt $a - b = 0$, vagyis $a = b$, amivel a második tag 2. és 3. tényezője egyenlővé válik, másrészt e két tényező közös értéke is 0, tehát akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása könnyen következik *Szűcs Adolf* következő tételéből[1]: legyen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$, legyen továbbá $z_1, z_2, \ldots, z_n$ az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok elrendezése tetszés szerinti sorrendben, akkor

$$\begin{aligned}
x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n &\geq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n \geq \\
&\geq x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1.
\end{aligned}$$

Ebből feladatunk állítása így következik: Legyen $n = 3$, továbbá tegyük fel, továbbra is, hogy $a \leq b$, $a \leq c$. Ha $b \leq c$, legyen $x_1 = c^2$, $x_2 = b^2$, $x_3 = a^2$, $y_1 = c$, $y_2 = b$, $y_3 = a$, $z_1 = a$, $z_2 = c$, $z_3 = b$. Ha pedig $b > c$, akkor legyen $x_1 = b^2$, $x_2 = c^2$, $x_3 = a^2$, $y_1 = b$, $y_2 = c$, $y_3 = a$, $z_1 = c$, $z_2 = a$, $z_3 = b$. A fenti első egyenlőtlenség mindkét esetben a feladat állítását adja.

2. Az egyenlőtlenség helyessége belátható a számok nagyságviszonyára tett minden megszorítás nélkül is, pl. a következő azonosság alapján:

$$\begin{gathered}
a^3 + b^3 + c^3 - a^2 b - b^2 c - c^2 a = \\
= \frac{1}{3}\big[(a-b)^2(2a+b) + (b-c)^2(2b+c) + (c-a)^2(2c+a)\big].
\end{gathered}$$

[1] V. ö.: *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek II. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966. 44. o.