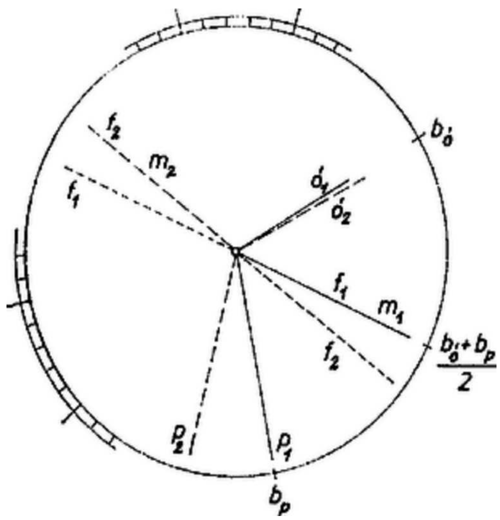
I. megoldás. Célszerű a szögmérés egységéül az óra számlapjának percbeosztását, azaz a teljes körülfordulás 60-adrészét választani.

Két mutató az óra számlapját két körcikkre osztja, ezeket ugyanannak az egyenesnek a tengelyből induló két félegyenese felezi. Az óramutatók fedése esetén az egyik körcikk a teljes körlemezbe, a másik a kör egy sugarába megy át; ennek az egyenese tekinthető ilyenkor a szögfelezőnek.

Egy a feltételeket kielégítő H_1 helyzetből kiindulva határozzuk meg azt az időtartamot (másodpercben mérve), ami alatt a legközelebbi megfelelő H_2 helyzetbe jutnak a mutatók. A másodpercmutató t másodperc alatt t beosztással mozdul el; a H_2 helyzetben a szögfelezőnek a másik félegyenesével kerül fedésbe, mint a H_1 helyzetben. Tekintetbe kell vennünk azt is, hogy időközben a szögfelező helyzete is megváltozott. Azt az ívet vizsgálva, amelyik az óramutatótól a mutatók járása irányában a percmutató felé terjed, t másodperc alatt az óramutató $\frac{5}{60 \cdot 60} \cdot t = \frac{t}{720}$ beosztást halad előre, a percmutató $\frac{t}{60}$ beosztást.



4. ábra

Ha a H_1 helyzetben az óramutató a b_0 beosztásnál, a percmutató pedig b_p-nél volt, akkor a szögfelező helyzete $(b_0 + b_p)/2$ volt, t másodperc múlva pedig $(b_0 + t/720 + b_p + t/60)/2 = (b_0 + b_p)/2 + 13t/1440$, tehát a szögfelező $13t/1440$ beosztással jutott tovább.[1] Azt, hogy i idő elteltével a másodpercmutató a szögfelezőnek a H_1 helyzetben fedett félegyenesével ellentétes irányú félegyenesével került fedésbe, az

$$i = \frac{13i}{1440} + 30$$

egyenlet fejezi ki. Innen $i = \frac{1440}{1427} \cdot 30 = 30 + \frac{390}{1427}$ mp. Ez nem tartalmazza a H_1 helyzetet jellemző adatokat, így azt nyertük, hogy bármely két egymásutáni, a feltételeket kielégítő helyzet közt a nyert i idő telik el.

A három mutatónak 0 óra 0 perc 0 másodperckor elfoglalt helyzete kielégíti a követelményt, tehát az összes megfelelő időpontok i többszörösei:

$$t = k \cdot \left(30 + \frac{390}{1427}\right) \text{ mp} =$$
$$= \frac{43\,200\,k}{1427} \text{ mp} = \frac{720\,k}{1427} \text{ perc},$$

ahol k egész szám. Ha $k = 1427$, akkor $t = 720$ perc $= 12$ óra. És ettől kezdve ismétlődnek a mutatóállások; $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 1426$ értékekhez viszont csupa különböző mutató-állások tartoznak, hiszen az óramutató egyszer jár körbe, tehát biztosan mindig más helyzetben van.

II. megoldás. Azt az időt, ami két egymás utáni megfelelő helyzet közt telik el, kiszámíthatjuk a következő módon is: Az olyan helyzetek időpontjait keressük, amelyekben a szögfelező *egyenese* és a másodpercmutató *egyenese* fedi egymást. Ez 12 óra alatt annyiszor következik be, amennyivel többször kerül az utóbbi kiindulási helyzetébe, mint az előbbi, tekintettel arra, hogy a 12 óra végén mindkét egyenes éppen közös kiindulási helyzetébe tér vissza.

A másodpercmutató egyenese félpercenként kerül vissza eredeti helyzetébe, tehát 12 óra alatt $12 \cdot 60 \cdot 2 = 1440$-szer. A szögfelező egyenese, mint láttuk, $13/1440$ beosztást halad előre másodpercenként, tehát 12 óra alatt $12 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 13/1440 = 30 \cdot 13$ beosztásnyi utat tesz meg. Ez alatt 13-szor kerül fedésbe eredeti helyzetével, miután ez 30 beosztásnyi elforduláskor következik be. A másodpercmutató egyenese tehát 12 óra alatt $1440 - 13 = 1427$-szer találkozik a szögfelező egyenesével, s így két egymás utáni találkozás közt $12 \cdot 60 \cdot 60/1427 = 30 + 390/1427$ másodperc telik el.

[1] A 4. ábra az elfordulásokat nagyítva tünteti fel.