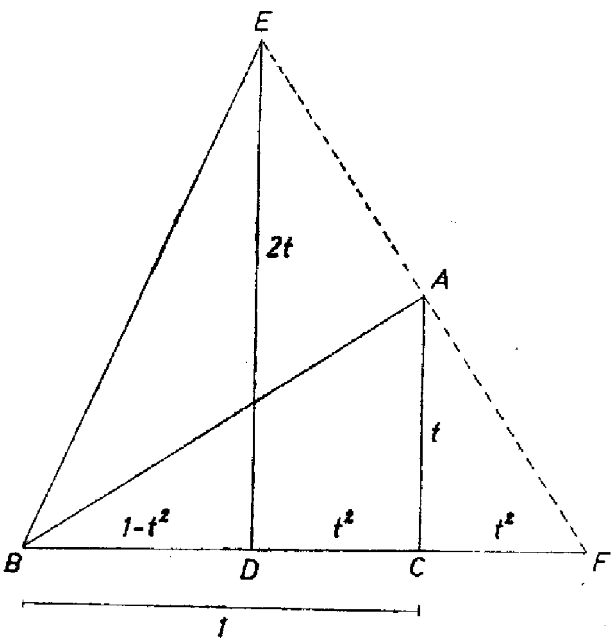


1. ábra

I. megoldás. Rajzoljunk C-nél derékszögű háromszöget $AC = t$, $BC = 1$ hosszúságú befogókkal; mérjük rá a BC befogóra a $BD = 1 - t^2$ hosszúságot, majd a D-ben a BC egyenesre emelt merőlegesre az egyenes A-t tartalmazó oldalán a $DE = 2t$ hosszúságot. Ekkor azt kell bebizonyítanunk, hogy $EBD\sphericalangle = 2\,ABC\sphericalangle$, vagyis hogy AB felezi az EBD szöget. Ez következik abból, ha megmutatjuk, hogy az EA egyenes az EBD szögtartományból egyenlő szárú háromszöget vág le, amelynek AB a szimmetriatengelye.

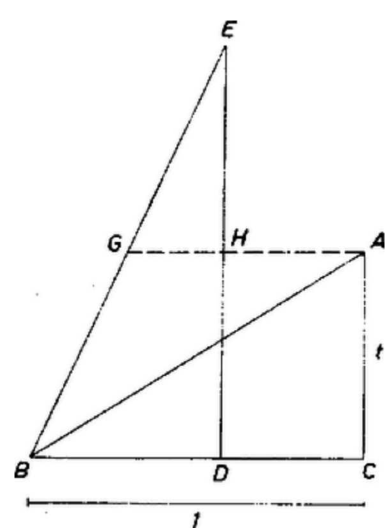
Jelöljük az EA és BD egyenes metszéspontját F-fel. AC az FED háromszög középvonala, mert párhuzamos ED-vel, és fele akkora. Ha ugyanis A és C közelebb, ill. messzebb volna F-től, mint a megfelelő oldal felezőpontja, akkor összekötő egyenesük is kisebb, ill. nagyobb volna, mint ED fele. Ezek szerint $EA = AF$, és $FC = CD = CB - DB = 1 - (1 - t^2) = t^2$. Az FAC és ABC háromszögek hasonlók, mert mindkettő C-nél derékszögű, és a befogók aránya egyenlő:

$$\frac{AC}{FC} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{BC}{AC}.$$

A megfelelő befogók egymáshoz képest ugyanolyan irányban $90°$-kal vannak elforgatva, így ugyanez áll az átfogókra is: $FA \perp AB$.

Ezzel beláttuk, hogy AB az EF szakaszt felező és arra merőleges egyenes, tehát az EBF háromszög szimmetriatengelye; így az $EBF\sphericalangle = EBD\sphericalangle$ szögfelezője.

II. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC és EBD háromszögeket ugyanúgy, mint az előző megoldásban. Messe az A-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes BE-t és DE-t G-ben és H-ban. GH a BDE háromszög középvonala, mert $DH = CA = t = \dfrac{1}{2}\,DE$, és $GH \| BD$, tudjuk továbbá, hogy a középvonal is párhuzamos BD-vel, és H-n át csak egy ilyen párhuzamos húzható. Így egyrészt Pythagorász tétele szerint (2. ábra)



2. ábra

$$BG = \frac{1}{2}\,BE = \frac{1}{2}\sqrt{BD^2 + DE^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2} = \frac{1+t^2}{2},$$

másrészt

$$GA = GH + HA = \frac{BD}{2} + DC = \frac{1-t^2}{2} + [1 - (1-t^2)] = \frac{1+t^2}{2}.$$

Eszerint az ABG háromszög egyenlő szárú, így – felhasználva azt is, hogy $GA \| BC$ –

$$EBA\sphericalangle = GBA\sphericalangle = GAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle,$$

tehát $EBD\sphericalangle = 2\,ABD\sphericalangle$, és ezt kellett bizonyítanunk.

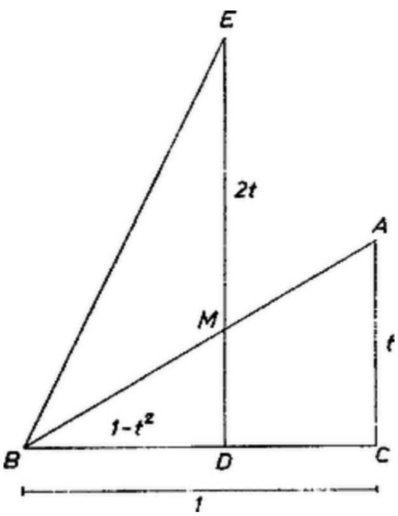
(Tulajdonképpen azt bizonyítottuk, hogy a G közepű $(1+t^2)/2$ sugarú kör A pontjában érinti AC-t, tehát A az érintővel párhuzamos húrhoz tartozó ED ív felezőpontja.)

III. megoldás. Ismét az előző megoldásban látott módon helyezzük el a két háromszöget. Jelöljük AB és DE metszéspontját M-mel. Elég megmutatnunk, hogy M ugyanolyan arányú két részre osztja DE-t, mint a szögfelező, ugyanis ha egy P pont a DE szakaszon D-től E felé mozog, akkor a DP/PE arány számlálója nő, nevezője csökken, és így a tört értéke állandóan nő, egy értéket csak egyszer vesz fel.

Tudjuk, hogy a szögfelezőre nézve a szóban forgó osztásarány megegyezik a BD/BE aránnyal, mivel pedig

$$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2} = 1 + t^2,$$

így a szögfelező által kimetszett szeletek aránya $(1-t^2)/(1+t^2)$.



3. ábra

Az ABC és MBD háromszögek hasonlók, így befogóik arányára:

$$\frac{MD}{BD} = \frac{AC}{BC}, \quad MD = \frac{AC \cdot BD}{BC} = t(1-t^2).$$

Ezt felhasználva nyerjük, hogy

$$\frac{DM}{ME} = \frac{t(1-t^2)}{2t - t(1-t^2)} = \frac{t(1-t^2)}{t(1+t^2)} = \frac{BD}{BE}.$$

Az M pont tehát ugyanolyan arányú részekre osztja DE-t, mint a szögfelező, és ezzel beláttuk, hogy BM azonos az EBD szög felező egyenesével.