Alkalmas új ismeretlenek bevezetése útján feladatunkat egyszerűbb egyenletekből álló egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza. Legyen pl.

$$x - y = u, \quad \text{és} \quad xy = v,$$

akkor egyenleteink így alakulnak át:

$$x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy = u^2 + v = 2, \tag{1a}$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) = u^3 + 3uv = 4. \tag{2a}$$

Az első egyenletből v kifejezését a másodikba helyettesítve:

$$u^3 + 3u(2 - u^2) = 4.$$

Rendezés és egyszerűsítés után a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$u^3 - 3u + 2 = 0,$$

$$(u^3 - u) - 2(u-1) = (u-1)\big[u(u+1) - 2\big] = (u-1)(u^2 + u - 2).$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát vagy $u - 1 = 0$, $u_1 = 1$, vagy $u^2 + u - 2 = 0$. Az utóbbi egyenlet két gyöke $u_2 = 1$ és $u_3 = -2$. Az u-khoz tartozó v-ket az (1a) egyenletből számíthatjuk ki,

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = -2.$$

Az $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ gyökrendszerhez tartozó x és y értékeket az

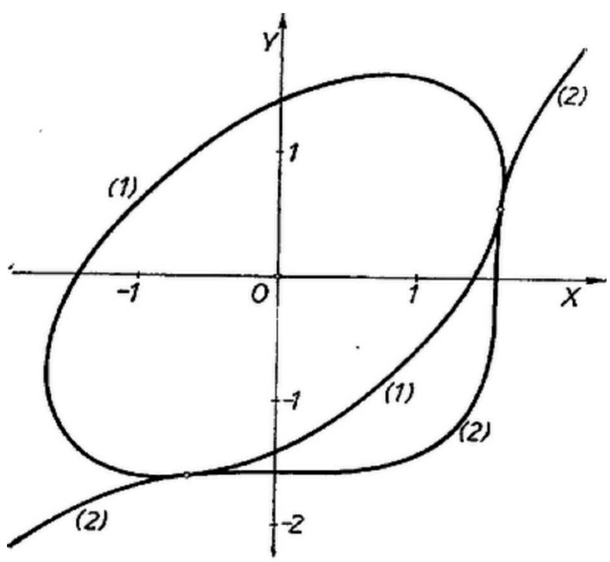
$$u = x - y = 1, \quad v = xy = 1$$

egyenletekből kiszámítva

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Az u_2, v_2 gyökpárból nem kapunk új megoldást. Az $u_3 = -2$, $v_3 = -2$ gyökpárral adódó $x - y = -2$, $xy = -2$ egyenletrendszernek nincs valós megoldása.



Megjegyzés. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy (1) képe a derékszögű koordinátarendszerben olyan ellipszis, amelynek középpontja az origó, szimmetria tengelyei a koordináta–tengelyekkel 45°-os szöget zárnak be, nagy tengelye az I. és III. síknegyedekben halad, – (2) képe pedig egy ún. harmadrendű görbe. A mindkét egyenletet kielégítő x, y számpárokhoz tartozó pontok a görbéknek közös pontjai, ez esetben érintkezési pontok, bennük a két görbének közös az érintője is.