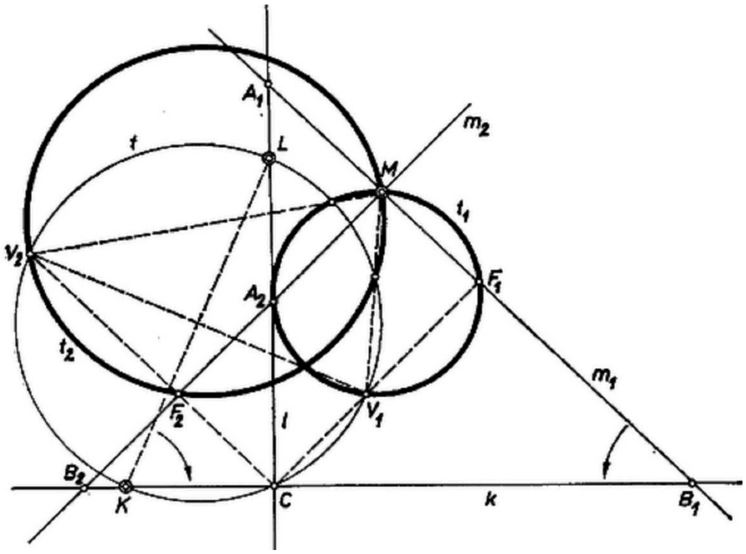

A keresett mértani hely egy pontját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Húzunk egy tetszőleges k egyenest a K ponton át, majd L-en át egy erre merőleges l egyenest, metszéspontjuk legyen C. Ezután az M ponton keresztül meghúzzuk a k-val 45°-os szöget bezáró m_1, m_2 egyeneseket. Az ábrán m_1 az óramutató járásával ellenkező irányban 45°-kal elforgatva jut k-ra, m_2 pedig megegyező irányú 45°-os forgatással. Messe k-t és l-et m_1 a B_1, ill. A_1 pontban, m_2 pedig B_2-ben, ill. A_2-ben. Ekkor A_1B_1C és A_2B_2C a feladat követelményeinek megfelelő egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, ábránkon A_1B_1 felezőpontja F_1, A_2B_2 felezőpontja F_2, mindkettő hozzátartozik a keresett mértani helyhez.

Azt keressük, milyen alakzatot ír le F_1 és F_2, míg k a K körül – s így l az L körül, m_1 és m_2 pedig az M körül – egyszer körülfordul.

Az átfogók felezőpontjait A_1 és B_1, ill. A_2 és B_2 kijelölése nélkül is megkaphatjuk, ugyanis C a KL szakasz fölé írt t Thalesz–körön van, CF_i pedig $(i = 1, 2)$ – egyenlő szárú háromszögről lévén szó – felezi az A_iCB_i szöget és merőleges m_i-re, tehát F_i-t M merőleges vetülete adja a k, l egyenespár megfelelő f_i szögfelezőjén. E szögfelezők minden helyzetben felezik t-nek a szárak közé eső KL félkörívét is, és így átmennek t-nek a KL-re merőleges V_1V_2 átmérője valamelyik végpontján (az ábrán CF_1 átmegy V_1-en, CF_2 pedig V_2-n. Ezért – bármilyen is a C, F_i, V_i pontok sorrendje –, mindig fennáll: $MF_1C\sphericalangle = MF_1V_1\sphericalangle = 90°$ és $MF_2C\sphericalangle = MF_2V_2\sphericalangle = 90°$. Így a k különböző helyzeteihez tartozó F_1 pontok a V_1M, mint átmérő fölé rajzolt t_1 Thalesz–körön vannak, az F_2 pontok pedig a V_2M átmérő fölé rajzolt t_2 Thalesz–körön.

Hátra van még annak megvizsgálása, hogy a két utóbbi Thalesz–kör minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Legyen a t_1 kör egy M-től és V_1-től különböző pontja X_1, és kössük össze X_1-et V_1-gyel és M-mel. Ekkor $MX_1V_1\sphericalangle = 90°$; továbbá, miután V_1 rajta van a t körön, az X_1V_1 egyenes e kört általában még egy C pontban metszi. Így a CK, CL és X_1M egyenesek egy derékszögű egyenlő szárú háromszöget alkotnak, és e háromszög köré írt kör középpontja éppen a felvett X_1 pont. Ugyanis a CX_1 és CK egyenesek kisebbik szöge 45°, mert az egyenesek között t-nek valamelyik V_1K íve fekszik, vagyis a kör negyede vagy háromnegyede, így a CK-ra merőlegesen álló CL egyszersmind tükrös párja is CK-nak CX_1-re, továbbá X_1M önmagának tükörképe CX_1-re, hiszen merőleges rá; végül X_1 az így nyert háromszög átfogójának és szimmetriatengelyének közös pontja. – X_1 gyanánt V_1 is vehető, ekkor X_1V_1 egyenes gyanánt az $X_1M = V_1M$ átmérőre emelt merőleges, t_1-nek V_1-beli érintője veendő, hasonlóan $X_1 = M$ esetén az M-beli érintőt vesszük X_1M gyanánt. – Hasonlóan előfordulhat, hogy X_1V_1 a t kört másodszor éppen K-ban, vagy L-ben metszi, ekkor az egyik befogó egyenese a KL egyenes, a másiké pedig a talált metszéspontban t-hez húzott érintő. C gyanánt adódhat maga V_1 is, ha ti. X_1V_1 éppen érinti a t kört.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a t_1 kör minden pontja a mértani helyhez tartozik. Hasonlóképpen az F_2 pontok t_2 körének minden pontja ugyancsak hozzátartozik a mértani helyhez, mert meggondolásaink V_1 helyén V_2-vel változatlanul érvényesek. A keresett mértani hely tehát a t_1 és t_2 körökből áll.

Megjegyzés. Lehetséges, hogy az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög ponttá zsugorodik össze, éspedig akkor és csak akkor, ha C azonosnak adódik X_1-gyel, hiszen a szóban forgó körülírt kör sugara X_1C. Ilyen X_1 mindig van: t és t_1-nek V_1-től különböző közös pontja, ill. ha t és t_1 érintkeznek, akkor maga V_1.