I. megoldás. Legyen N olyan k-jegyű egész szám, melynek négyzetében az első k jegy rendre megegyezik N jegyeivel. Ekkor az $N^2 : N$ osztás N-et, tehát egy k-jegyű számot ad hányadosul. Másrészt a szokásos módon végezve az osztást az első részletosztandó, N^2 első k jegye, éppen N; ebben az osztó megvan 1-szer, az első részletmaradék pedig 0. A hányados első jegye tehát 1, és az N^2 osztandó további jegyeit egyenként sorra „levéve" a hányados további jegyei gyanánt mindaddig 0-t kapunk, amíg a részletosztandók k-nál kevesebb jegyűek, tehát $k-1$ egymás utáni lépésben. Így a hányados kezdő 1-ese után $k-1$ db 0 jegy következik. Ezzel viszont megkaptuk az N hányadosnak mind a k jegyét, tehát N valóban 10-nek hatványa: 10^{k-1} ennélfogva $N^2 = 10^{2k-2}$, vagyis az osztás összes lépéseiben 0 a maradék.

II. megoldás. Legyen ismét, N a kérdéses alapszám, és tegyük fel, hogy N^2-ben az N jegyeivel rendre megegyező első k számjegy után még t darab számjegy szerepel. Mindezeket zérussal helyettesítve (ha nem eredetileg azok), N-nek 10^t-szeresét kapjuk, és N^2 nagyobb a kapott számnál, vagy éppen egyenlő vele:

$$N^2 \geq N \cdot 10^t.$$

Ezt (a pozitív) N-nel osztva

$$N \geq 10^t. \tag{1}$$

Írjunk másrészt N^2 összes további jegyei helyére 9-eseket. A kapott szám $N \cdot 10^t$-nél a t jegyből álló $999\ldots 9 = 10^t - 1$ számmal nagyobb, másrészt N^2 kisebb ennél a számnál, vagy éppen egyenlő vele:

$$N^2 \leq N \cdot 10^t + 10^t - 1 = (N+1)10^t - 1.$$

A jobb oldal 1-gyel kisebb $N+1$-nek 10^t szeresénél, a bal pedig 1-gyel nagyobb az $(N+1)(N-1) = N^2 - 1$ számnál, így

$$N^2 - 1 < (N+1)10^t.$$

Ezt (a pozitív) $N+1$-gyel osztva

$$N - 1 < 10^t, \qquad N < 10^t + 1.$$

Eredményünket (1)-gyel egybevetve $N = 10^t$, hiszen N egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. Mivel N k-jegyű, azért $t = k-1$.

Megjegyzések. 1. Megoldásainkban feltettük, hogy egész számról van szó. Valóban csak ezeknél szoktunk a számjegyek számáról beszélni. Tizedes jegyek után tetszés szerinti számú 0-t írhatunk, s így a számjegyek száma határozatlan. Ha N és N^2 tizedes jegyeket is tartalmaznak, 10 alkalmas hatványával szorozva visszavezethetjük a kérdést egész számokra.

2. A feladat állítása 2-nél nagyobb hatványkitevő esetén nem igaz. Pl. $32^3 = 32\,768$, a számjegyek sorozata szintén 32-vel kezdődik, vagy $46\,416^4 = 4\,641\,633\,499\,322\,843\,136$, $18^5 = 1\,889\,568$, $16^6 = 16\,777\,216$; $17\,783^5$ kezdő számjegyei ugyancsak 1, 7, 7, 8, 3. Az I. megoldás gondolatmenete rámutat ennek lehetőségére. Pl. $N^3 : N = N^2$ jegyeinek száma több, mint k, tehát a hányadosban a $k+1$-edik helytől kezdve már felléphet 0-tól különböző számjegy.