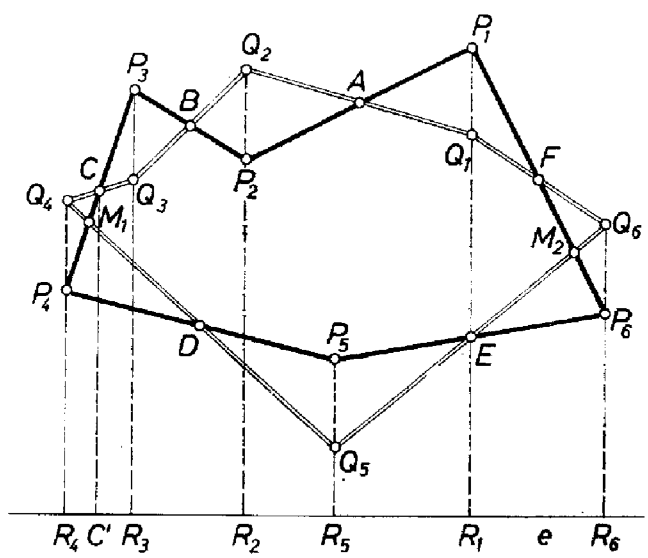
**2. feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy ha két hatszög oldalainak felezőpontjai rendre megegyeznek, akkor a két hatszög területe egyenlő.*

**I. megoldás.** Legyen a $P_1P_2P_3P_4P_5P_6 = P$ hatszög $P_1P_2$, $P_2P_3$, $\ldots$, $P_6P_1$ oldalának felezőpontja rendre $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, és tegyük fel, hogy rendre ugyanezen pontok felezik a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = Q$ hatszög egymás utáni $Q_1Q_2$, $Q_2Q_3$, $\ldots$, $Q_6Q_1$ oldalát is. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a $P$ és $Q$ hatszögek területe egyenlő.

Egyelőre feltesszük, hogy sem $P$, sem $Q$ nem hurkolt idom és meggondolásainkat az 1. ábra esetéhez kapcsoljuk hozzá. A közös felezőpontokban a két hatszög egy-egy oldala metszi egymást, pl. $A$-ban a $P_1P_2$ és $Q_1Q_2$ oldalak. Ezért az egyik hatszög kerületén végighaladva mindegyik felezőpontban átlépjük a másik hatszög kerületét, vagy belépünk abba, vagy kilépünk belőle, – hacsaknem kivételesen $P$ és $Q$ egy-egy oldalegyenese egybeesik, és így egy szakaszon közös határukon haladunk. Ennélfogva $Q$ területének is bizonyos részei $P$-n belül vannak, más részei $P$-n kívül és viszont. Pl. az $AP_1Q_1$ háromszög $P$-höz hozzátartozik, $Q$-hoz pedig kívülről csatlakozik, az $AP_2Q_2$ háromszög viszont $Q$-n belül, egyszersmind $P$-n kívül van. E két háromszög egybevágó, mert $A$-ból kiinduló oldalaik páronként egyenlők és a köztük levő szögek csúcsszögek, ezért területük is egyenlő. Így kapjuk a következő 6 egyenlőséget (a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, ahogy magukat a háromszögeket szokás):

$$
\begin{aligned}
AP_1Q_1 &= AP_2Q_2,\\
BP_3Q_3 &= BP_2Q_2,\\
CP_3Q_3 &= CP_4Q_4,\\
DP_4Q_4 &= DP_5Q_5,\\
EP_6Q_6 &= EP_5Q_5,\\
FP_1Q_1 &= FP_6Q_6.
\end{aligned} \tag{7}
$$




*1. ábra*

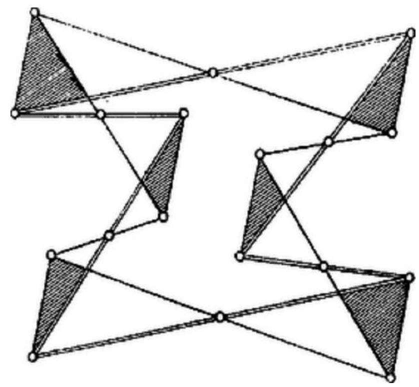
A balról felsorolt háromszögek mind kívülről csatlakoznak $Q$-hoz, a jobboldaliak pedig $P$-hez. Ezért $Q$-hoz hozzávéve a bal oldali háromszögeket, az $AQ_2BP_3CQ_4$
$P_4DQ_5EP_6Q_6FP_1 = S$ sokszöget kapjuk. Ugyanezt a sokszöget kapjuk $P$-ből a jobb oldalon felsorolt háromszögek hozzávételével. Eszerint, a $P$, $Q$, $S$ idom területét is $P$-vel, $Q$-val, ill. $S$-sel jelölve, a (7) egyenlőségek összeadásával adódó egyenlőség két oldalának értékét pedig $T$-vel, a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$S = Q + T = P + T.$$

Innen $Q = P$. Ezzel az állítást – az ábrán felvett esetre – bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* Számos versenyző a $P$ és $Q$ hatszögek közös részéhez, a $Q_1AP_2$
$BQ_3CM_1DP_5EM_2F$ sokszöghöz vette hozzá a bal-, ill. jobboldalon álló háromszögeket. ($M_1$ a $P_3P_4$ és $Q_4Q_5$, $M_2$ pedig a $PP_1$ és $Q_5Q_6$ oldalak közös pontja; ezek nem egymásnak megfelelő oldalak; csak esetleges, hogy van közös pontjuk; ábránkon több ilyen oldalpár nincs is.) Egy részük nem vette észre, hogy így nem $P$-t, ill. $Q$-t kapta, hanem nagyobb idomot, mert egy-egy hozzávett háromszög részei, az $M_1P_4Q_4$ és $M_2P_6Q_6$ háromszögek sem $P$-hez, sem $Q$-hoz nem tartoznak hozzá. Mások ezek elvételével tették teljessé bizonyításukat.

A (7) háromszögekkel „kétszer fedett” $M_1P_4Q_4$ háromszög azért keletkezett, mert a $C$, $D$ egymás utáni felezőpontok a $P_4Q_4$ egyenes ugyanazon oldalán vannak. Ha egy ilyen $P_iQ_i$ egyenes átmegy a $P_{i-1}P_i$, vagy a $P_iP_{i+1}$ oldal felezőpontján, akkor a (7) felsorolás megfelelő háromszöge egyenesszakasszá fajul, egyszersmind kétszer fedett háromszög sem keletkezik. Előfordulhat viszont, hogy mind a hat szakaszon létrejön kétszer fedett háromszög (2. ábra).



*2. ábra*

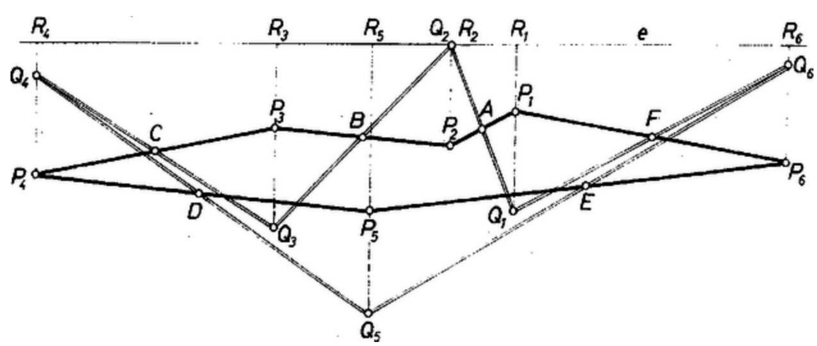
**II. megoldás.** $P$ és $Q$ egy-egy közös felezőponttal bíró oldalának – pl. az egymást $A$-ban felező $P_1P_2$, $Q_1Q_2$ oldalpárnak – végpontjai paralelogrammát alkotnak, ezért $P_1Q_1 \parallel Q_2P_2 \parallel P_3Q_3 \parallel Q_4P_4 \parallel P_5Q_5 \parallel Q_6P_6$. Vegyünk egy a $P_1Q_1$-re merőleges, sem $P$-t, sem $Q$-t nem metsző $e$ egyenest, és vetítsük erre $P$ és $Q$ csúcsait. A $P_1$, $Q_1$, a $P_2$, $Q_2$, …, a $P_6$, $Q_6$ pontpárok vetülete egybeesik, jelöljük ezeket rendre $R_1$, $R_2$, …, $R_6$-tal (1. ábra, ezek közül egyesek egybe is eshetnek). Ekkor $P$ és $Q$ területét úgy kaphatjuk, hogy $4-4$ trapéz területének összegéből kivonjuk más $2-2$ trapéz területének összegét:

(8)
$$\begin{aligned} P &= P_4P_3R_3R_4 + P_3P_2R_2R_3 + P_2P_1R_1R_2 + P_1P_6R_6R_1 - P_4P_5R_5R_4 - P_5P_6R_6R_5,\\ Q &= Q_4Q_3R_3R_4 + Q_3Q_2R_2R_3 + Q_2Q_1R_1R_2 + Q_1Q_6R_6R_1 - Q_4Q_5R_5R_4 - Q_5Q_6R_6R_5. \end{aligned}$$

A két kifejezés ugyanazon sorszámú tagjai páronként egyenlők, mert a megfelelő trapézok magassága és középvonala közös; pl. az első tagokra $R_4R_3$ és $CC'$, ahol $C'$ a $C$-nek $e$-n levő vetülete. Ezért $P = Q$.

Az ábránkétól különböző esetekben a (8) előállításokban a hozzáadandó tagok száma legalább 1, legfeljebb 5, és ezt a számot a levonandó tagok száma 6-ra egészíti ki. Amennyiben szomszédos indexű $R$ pontok egybeesnek, a tagok száma csökken.

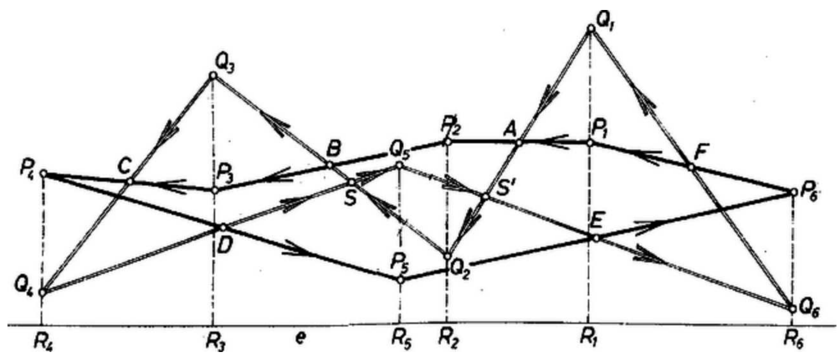
*Megjegyzések.* 1. A most bemutatott módon szokás meghatározni sokszögek területét, ha csúcsaik koordinátáikkal vannak adva. Így határozza meg a földmérő mérnök is sokszög alakú telkek területét.




*3. ábra*

2. Ez a bizonyítás mutatja, hogy az állítás a 3. ábra esetében is érvényes, ahol $P$ és $Q$ közös része nem összefüggő: két négyszögre és egy hatszögre esik szét. Ebben az esetben az I. megoldás megjegyzésében említett meggondolást jelentősen ki kellene egészítenünk.

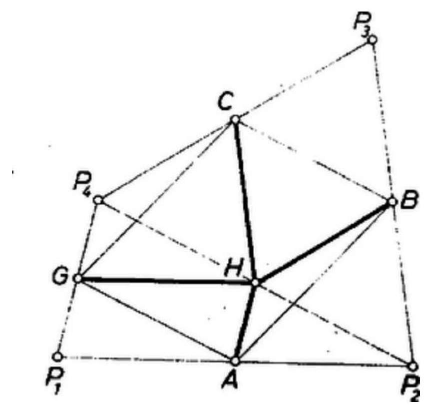
3. A 4. ábra esetében $Q$ hurkolt, $Q_2Q_3$ és $Q_4Q_5$ oldalszakaszainak közös pontja $S$, a $Q_1Q_2$ és $Q_5Q_6$ szakaszok közös pontja $S'$. Ilyen idom területét eddig nem értelmeztük. Az oldalszakaszok, ill. részeik a $Q_1S'Q_6 = H_1$ és $SQ_3Q_4 = H_2$ háromszögeket és az $S_1'Q_2SQ_5 = N$ négyszöget határolják körül.



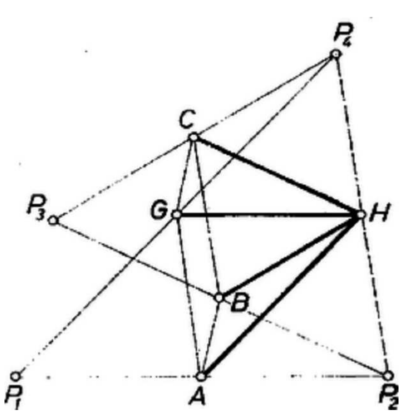

*4. ábra*

Nézzük meg, mit ad ebben az esetben a II. megoldás gondolatmenete. $N$ területét (8) pozitív tagjaiban nem vettük számításba, mert a négyszög az $R_3Q_3Q_2R_2$, $R_2Q_2Q_1R_1$ trapézokon kívül van, a negatív tagokban viszont levontuk, mert az $R_4Q_4Q_5R_5$, $R_5Q_5Q_6R_6$ trapézok tartalmazzák. Eszerint az állítás érvényes marad, ha $Q$ területén ezúttal a $H_1 + H_2 - N$ kifejezést értjük. (Könnyen megjegyezhető ez a megállapodás, ha összehasonlítjuk a $H_1$, $H_2$ és $N$ részek körüljárásának irányát, miközben $Q$ kerületét $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$, $Q_6$ sorrendben körüljárjuk. $H_1$ és $H_2$ körüljárása az óramutató járásával ellentétes irányú, akárcsak a $P = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ körüljárásé, $N$ körüljárása pedig az óra járásával megegyező. Másképpen: $H_1$, $H_2$ és $P$ körülhatárolt része a mondott körüljárásban a menetvonal bal oldalán van, $N$-é pedig a jobb oldalon.)

**III. megoldás.** Ismeretes, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai, melynek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival és fele akkorák, mint az átlók (5. ábra, $P_1P_2P_3P_4$ és $ABCG$). Megmutatjuk, hogy a paralelogramma területe fele a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög területének. Valóban, a $P_2P_4$ átló $H$ felezőpontját $A$-val, $B$-vel, $C$-vel, ill. $G$-vel összekötő szakasz rendre párhuzamos és egyenlő a $P_4P_1$, $P_4P_3$, $P_2P_3$, ill. $P_2P_1$ oldal felezésével előállt szakaszokkal. Ezért az $ABH$ és $CGH$ háromszögek áttolhatók $GCP_4$-be, ill. $BAP_2$-be és a $BCH$ és $GAH$ háromszögek 180°-os forgatással átforgathatók $CBP_3$-ba, ill. $AGP_1$-be. Így pedig a négy részre darabolt $ABCG$ paralelogramma részeivel maradéktalanul lefedhetjük a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnek a paralelogrammán kívüli részeit.

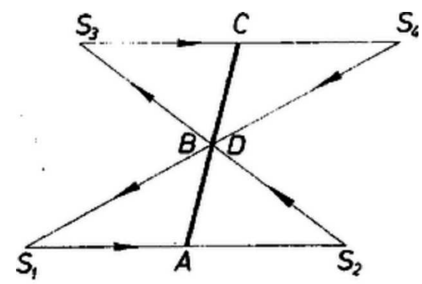



*5. ábra*

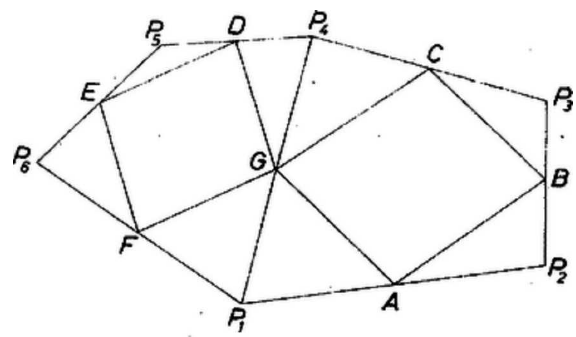



*6. ábra*

(Állításunk hurkolt négyszögre is igaz – 6. ábra –, ha ennek területét a fenti megjegyzés szerint értelmezzük, továbbá a felhasznált háromszögek területét pozitív, ill. negatív előjellel tekintjük aszerint, hogy felsorolt körüljárásuk iránya megegyező, ill. ellentétes az $ABCG$ paralelogramma körüljárásának irányával. Ha a hurkolt négyszöget az $S_1S_2S_3S_4$ paralelogrammából képezzük az $S_3$ és $S_4$ csúcsok felcserélésével, akkor az oldalfelező pontok egy egyenesre esnek (7. ábra), $ABCD = 0$, megfelelően annak, hogy $S_1S_2B\triangle \cong S_4S_3D\triangle$, és így különbségük 0. A továbbiakban is minden területet így értünk.)




*7. ábra*




*8. ábra*

Ezek szerint a fenti $P$ hatszöget a $P_1P_4$ átlóval a $P_1P_2P_3P_4$ és $P_1P_4P_5P_6$ négyszögekre bontva és ezen átló felezőpontját $G$-vel jelölve $P$ területe kétszerese az $ABCG$ és $GDEF$ paralelogrammák területe összegének (8. ábra).

Ha mármost $Q$ hatszög oldalainak felező pontjai ugyancsak rendre az $A$, $B$, $\ldots$, $F$ pontok, akkor $Q$ területe is kétszerese az $ABCG + DEFG$ összegnek, és így egyenlő $P$ területével, ugyanis a paralelogrammák negyedik ($G$) csúcsát az első három csúcs egyértelműen meghatározza, ha sorrendjük is adva van. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Megjegyzések.* 1. Látható, hogy a négyszögoldalak felezőpontjai közül csak 3 független egymástól ($A$, $B$, $C$) és sorrendjük meghatározza $G$-t. Másrészt az is, hogy tetszés szerinti számú olyan négyszög szerkeszthető, melyre az oldalak felezőpontjai rendre azonosak $A$, $B$, $C$, $G$-vel. Ha ugyanis egy tetszés szerinti $S_1$ pont $A$-ra vett tükörképe $S_2$, $S_2$-é $B$-re $S_3$ és $S_3$-é $C$-re $S_4$, akkor $S_4$-nek $G$-re vett tükörképe azonos $S_1$-gyel. Hasonlóan a hatszögoldalak felezőpontjai közül csak öt független egymástól. Pl. felvéve az $A$, $B$, $C$, $D$ és $E$ pontokat, megszerkeszthetjük a $G$ pontot, mint az $ABCG$ paralelogramma negyedik csúcsát, majd az $F$ pontot, mint a $GDEF$ paralelogramma negyedik csúcsát. Ha viszont az adott 6 felezőpont megfelel e feltételnek, akkor az előbbihez hasonló tükrözéssorozattal akárhány olyan hatszög szerkeszthető, melyre az egymás utáni oldalak felezőpontja $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$.

2. Az eddigi felezőpontokat $A$, $B$, $C$, $F$, $E$, $D$ sorrendben véve a létrejövő hatszögek területe az előbbiekétől általában különböző, mert így a $DEFG$ paralelogramma helyére $FEDG$ lép, és ezek területei egymásnak negatívjai. Ezért nem felesleges a feladatnak az a kikötése, hogy a hatszögoldalak felezőpontjainak rendre kell megegyezniök.

3. Az állítás hatszög helyett bármely páros oldalszámú sokszög esetére érvényes, megjegyezve azt, hogy az utolsó felezőpontot a többiek – és sorrendjük – egyértelműen meghatározzák. Ez abból következik, hogy minden $2n$ oldalú sokszög ($2n \geq 6$) egy csúcsból kiinduló átlókkal $n-1$ négyszögre bontható.

Néhány versenyző akárhány oldalú sokszögre érvényesnek vélte az állítást. Ez a sejtés a páratlan oldalszámú sokszögekre semmitmondó. Ugyanis egy háromszög oldalainak felezőpontjai egyértelműen meghatározzák a háromszöget, és ugyanez áll a $2n-1$ oldalú sokszögekre[1] ($2n-1 \geq 5$), mert ezekben egy csúcsból azokat az átlókat meghúzva, amelyek a sokszöget egy négyszögre és egy $2n-3$, ill. $2n-5$, $\ldots$-szögre bontják (pl. $P_1P_4$, $P_1P_6$, $P_1P_8$, $\ldots$, $P_1P_{2n-2}$) utoljára háromszöget kapunk. Ezt az oldalak felezőpontjai egyértelműen meghatározzák és ebből kiindulva a sokszög többi csúcsai is egyértelműen meghatározhatók.

[1] Lásd 502. gyakorlat, K. M. L. 18 (1959/2) 45. o. és 557. gyakorlat, K. M. L. 19 (1959/11) 136. o.