1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$105(x+y)=120(y+z)=168(z+x)=xyz. \tag{1}$$

I. megoldás. Az adott 4 tagú egyenlőségsorozat bármely két tagja egyenlő kell, hogy legyen. Pl. az első kifejezés egyenlőségét írva fel a többi hárommal, két elsőfokú egyenletet kapunk és az ismeretlenek szorzata csak egy egyenletben lép fel:

$$105(x+y)=120(y+z), \tag{2}$$
$$105(x+y)=168(z+x), \tag{3}$$
$$105(x+y)=xyz. \tag{4}$$

(Ezekből a jobb oldalak egyenlősége már következik.)

Fejezzük ki az első két egyenletből y-t és z-t x-szel. Osszuk (2)-t 15-tel, (3)-at 21-gyel és vonjuk ki az utóbb kapott egyenletet az előbbiből. Így z kiesik:

$$7(x+y)-5(x+y)=8(y+z)-8(z+x)=8(y-x),$$

amiből

$$y=\frac{15x}{3}. \tag{5}$$

Ennek alapján (2)-ből

$$z=\frac{7}{8}(x+y)-y=\frac{7}{8}\cdot\frac{8x}{3}-\frac{5x}{3}=\frac{2x}{3}. \tag{6}$$

Ezeket (4)-be helyettesítve rendezés után

$$105\cdot\frac{8x}{3}-\frac{10x^3}{9}=0, \qquad x(7\cdot 4\cdot 9-x^2)=0,$$

és ennek gyökei:

$$x_1=0, \quad x_2=\sqrt{7\cdot 4\cdot 9}=6\sqrt{7}, \quad x_3=-6\sqrt{7}.$$

y és z megfelelő értékei (5), ill. (6) alapján:

$$y_1=0, \qquad y_2=10\sqrt{7}, \qquad y_3=-10\sqrt{7},$$
$$z_1=0, \qquad z_2=4\sqrt{7}, \qquad z_3=-\,4\sqrt{7}.$$

Mindhárom értékhármas kielégíti az egyenletrendszert.

II. megoldás. Egyszerűen jutunk célhoz akkor is, ha (1)-ből úgy írunk fel három független egyenletet, hogy az első három kifejezést külön-külön a negyedikkel tesszük egyenlővé, majd a fentiekhez némileg hasonlóan mindhárom ismeretlent kifejezzük az $xyz=p$ szorzattal, és először p-t számítjuk ki. A mondott egyenletekből mindjárt osztással:

$$\begin{aligned} x+y\phantom{{}+z} &= \frac{p}{105},\\ y+z &= \frac{p}{120},\\ x\phantom{{}+y}+z &= \frac{p}{168}. \end{aligned}$$

Az első kettő összegéből a harmadikat kivonva

$$2y=\frac{p}{105}+\frac{p}{120}-\frac{p}{168}=\frac{p}{840}(8+7-5)=\frac{p}{84},$$
$$y=\frac{p}{168}, \quad \text{és hasonlóan} \quad z=\frac{p}{420}, \quad x=\frac{p}{280}.$$

Most már szorzással

$$\frac{p}{420}\cdot\frac{p}{168}\cdot\frac{p}{280}=p, \qquad p(p^2-15\cdot 6\cdot 10\cdot 28^3)=0,$$

amiből, a zárójelbeli kivonandó $15\cdot 4\cdot 15\cdot 28^2\cdot 2^2\cdot 7$ alakjával

$$p_1=0 \qquad p_2=1680\sqrt{7}, \qquad p_3=-1680\sqrt{7},$$

és így a fenti kifejezésekkel ismét az

$$x,\ y,\ z=\begin{cases} 0, & 0, & 0,\\ 6\sqrt{7}, & 10\sqrt{7}, & 4\sqrt{7},\\ 6\sqrt{7}, & -10\sqrt{7}, & -4\sqrt{7} \end{cases}$$

gyökrendszereket kapjuk.